

問題 I

問 1

質量 m の小球が、重力と速度 v に比例する空気抵抗 $F_v = -bv$ (b は正定数) を受けて垂直落下している。重力加速度を g として、以下の問に答えよ。

- 1-1. 小球の位置を z 、重力の働く向きを $+z$ 方向として、小球に対する Newton の運動方程式を立てよ。

(解) 小球に対する Newton の運動方程式は、

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg - bv \quad (1)$$

と書ける。

- 1-2. この小球が落下の際に得る速さには上限値 v_f が存在する。 v_f の表式を求めよ。

(解) $v = v_f$ の時、小球は等速直線運動をしているので、

$$mg = bv_f$$

よって、

$$v_f = \frac{mg}{b}$$

- 1-3. 初期時刻 $t = 0$ に小球を静かに放し落下させた。運動方程式を解き、 $t(> 0)$ における速度 $v(t)$ を求めよ。

(解) (1) 式より、

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= mg - bv \\ \frac{dv}{dt} &= g - \frac{bv}{m} = -\frac{b}{m} \left(v - \frac{mg}{b} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで $v - mg/b = Ae^{\lambda t}$ とおくと、

$$v = Ae^{\lambda t} + \frac{mg}{b}$$

$$\frac{dv}{dt} = A\lambda e^{\lambda t}$$

これらを (2) 式に代入して, $\lambda = -b/m$ が得られる. 従って,

$$v(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t} + \frac{mg}{b} \quad (3)$$

初期条件より,

$$v(0) = A + \frac{mg}{b} = 0$$

$$\rightarrow A = -\frac{mg}{b}$$

が得られ, これと (3) 式より,

$$v(t) = \frac{mg}{b}(1 - e^{-\frac{b}{m}t})$$

が求まる.

1-4. t の関数としての $v(t)$ の概形をグラフに表せ.

(解) $m = b = 1$, $g = 9.8$ としてグラフをプロットした.

