

問題

問2

真空中の電磁波を記述するマクスウェルの方程式は、あるゲージを用いれば

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

$$\text{div} \mathbf{A} = 0 \quad (4)$$

と書かれる。ここで、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{A}$ 、 c 、 t は、それぞれ電場、磁束密度、ベクトル・ポテンシャル、真空中での光速、時間である。また x 、 y 、 z は空間座標である。以下、(3) 式と (4) 式の特解として減衰のない直線偏光した電磁波

$$\mathbf{A} = \mathbf{e} a e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (5)$$

を考える。ここで、 $\mathbf{e}$ 、 a 、 $\mathbf{k}$ 、 $\mathbf{r}$ 、 ω は、それぞれ電磁波の偏光方向を表す単位ベクトル、振幅 (正定数)、波数ベクトル、位置ベクトル (座標成分は x 、 y 、 z)、角振動数 (正定数) である。なお、本問では $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ を複素数として扱う。もし実際の物理量が必要ならば、それらの実数部分を考えれば良い。

2-1. (5) 式で記述される電磁波 $\mathbf{A}$ において、ある時刻 t_0 での波面 (等位相面) を表す式を求めよ。また、この波面の幾何学的形状がどのようなものであるのか、そして波面の進む方向はどの方向なのか、両者とも理由を明らかにして答えよ。

(解) 等位相面の式は

$$\omega t_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$$

$$\omega t_0 - k_x x - k_y y - k_z z = \text{const}$$

$$k_x x + k_y y + k_z z = \text{const}$$

よって、幾何学的形状は平面である。また、波数ベクトルは波の進行方向を表すので、この波の進行方向は $\mathbf{k}$ 方向である。

2-2. $\mathbf{A}$ が波動方程式 (3) を満たすための条件を求めよ。ただし、 $\mathbf{k}$ の大きさを k とし、これを用いること。

(解)(5) 式を (3) 式に代入する

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = a e(-k^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = 0$$

よって、波動方程式 (3) を満たすための条件は

$$\omega = ck$$

2-3. $\mathbf{A}$ が (4) 式を満たすために $\mathbf{e}$ の方向に課せられる条件を求めよ。また電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ の方向を (1) 式と (2) 式から求めよ。これら 3 つの方向の相互関係が分かるよう図を描け。

(解)(5) 式を (4) 式に代入する

$$\text{div} \mathbf{A} = ai(\mathbf{e} \cdot \mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = 0$$

よって、

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{k} = 0$$

$\mathbf{e}$ は $\mathbf{k}$ に垂直でなければならない。

(5) 式を (1) 式に代入する

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = e a \omega i e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \mathbf{E}$$

$\mathbf{E}$ と $\mathbf{e}$ は同じ方向を向いている。

(5) 式を (2) 式に代入する

$$\text{rot} \mathbf{A} = (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) a i e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \mathbf{B}$$

図は省略。(解答終わり)

ポインティング・ベクトルの時間平均電磁波 $\overline{\mathbf{P}}$ のエネルギー密度の平均 $\overline{w}$ は

$$\overline{\mathbf{P}} = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* \quad (6)$$

$$\overline{w} = \frac{1}{4} (\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*) \quad (7)$$

と書ける。ただし、ここで ε_0 と μ_0 は、それぞれ真空の誘電率と透磁率であり、真空中での光速と $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ の関係がある。また、*は複素共役をとることを意味している。

2-4. ポインティング・ベクトルの方向と大きさは、それぞれ、どのような物理的意味を持つのか答えよ。

(解)

方向…電磁波の進む方向

大きさ…単位時間、単位面積を通過する電磁波のエネルギーの大きさ

2-5. (6) 式と (7) 式を必ず使用して、 $\overline{\mathbf{P}} = ()\overline{w}$ と書いたときの () 内を c 、 $\mathbf{k}$ 、 k ($\mathbf{k}$ の大きさ) だけで表せ。さらに、このとき $\overline{\mathbf{P}}$ と $\overline{w}$ の関係が物理的に妥当であることを文章にて記述せよ。なお、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ を任意のベクトルとしたときに、 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ が成り立つ。

(解)

$$\mathbf{E} = e a \omega i e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{E}^* = -e a \omega i e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) a i e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{B}^* = -(\mathbf{k} \times \mathbf{e}) a i e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

(7) 式より

$$\overline{w} = \frac{1}{4}(\varepsilon_0 |\mathbf{e}|^2 a^2 \omega^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{k} \times \mathbf{e}|^2 a^2)$$

(6) 式より

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{P}} &= \frac{1}{2\mu_0} a^2 \omega \mathbf{e} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) \\ &= (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e})\mathbf{k} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{k})\mathbf{e} \frac{1}{2\mu_0} a^2 \omega \\ &= \frac{1}{2\mu_0} a^2 \omega \mathbf{k} \end{aligned}$$

ここで、 $\omega = ck$ より

$$\overline{\mathbf{P}} = \frac{1}{2\mu_0} a^2 ck \mathbf{k}$$

$$\overline{w} = \frac{1}{4}a^2(\varepsilon_0 c^2 k^2 + \frac{1}{\mu_0} k^2)$$

$$a^2 = 4 \frac{\overline{w}}{\varepsilon_0 c^2 k^2 + \frac{1}{\mu_0} k^2}$$

これを $\boldsymbol{P}$ に代入する

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{P}} &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{4ck\boldsymbol{k}}{\varepsilon_0 c^2 k^2 + \frac{1}{\mu_0} k^2} \overline{w} \\ &= \frac{1}{k^2} \frac{4ck\boldsymbol{k}}{\varepsilon_0 \mu_0 c^2 + 1} \overline{w} \\ &= \frac{c\boldsymbol{k}}{k} \overline{w}\end{aligned}$$