

問題 V

問 1

ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ に対し $r = |\mathbf{r}|$ であり, $\phi(r)$ を実関数とする. 以下の問に答えよ.

1-1. $\nabla \times (\phi(r)\mathbf{r})$ を計算せよ.

(解) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である. また, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ と表記する. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸方向の単位ベクトルである. これらを用いると,

$$\phi(r)\mathbf{r} = \phi(r)x\mathbf{i} + \phi(r)y\mathbf{j} + \phi(r)z\mathbf{k}$$

と書ける. 与式の x 成分のみ計算すると,

$$\begin{aligned} [\nabla \times \phi(r)\mathbf{r}]_x &= \frac{\partial}{\partial y}(\phi(r)z) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi(r)y) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} z - \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} y \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. y, z 成分についても同様なので,

$$\nabla \times \phi(r)\mathbf{r} = \mathbf{0}$$

1-2. 原点 $r = 0$ 以外で $\nabla \cdot (\phi(r)\mathbf{r}) = 0$ を満たす $\phi(r)$ を求めよ.

(解)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi(r)\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\phi(r)x) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi(r)y) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi(r)z) \\ &= 3\phi(r) + x \frac{\partial \phi(r)}{\partial x} + y \frac{\partial \phi(r)}{\partial y} + z \frac{\partial \phi(r)}{\partial z} \\ &= 3\phi(r) + x \cdot \frac{x}{r} \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} + y \cdot \frac{y}{r} \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} + z \cdot \frac{z}{r} \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} \\ &= 3\phi(r) + r \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} \end{aligned}$$

これが 0 になるので,

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dr} &= -\frac{3}{r}\phi \\ \frac{d\phi}{\phi} &= -3\frac{dr}{r} \\ \int \frac{d\phi}{\phi} &= -3 \int \frac{dr}{r} \\ \ln \phi &= -3 \ln r = \ln r^{-3}\end{aligned}$$

よって,

$$\phi(r) = r^{-3} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

問 2

複素数において対数関数 $w = \log z$ は指数関数の逆関数として定義される. すなわち, $z = e^w$ が成り立つ. 以下の問に答えよ.

1-1. z が極形式で $z = e^{i\theta}$ (r, θ は実数で $r \geq 0$) と表されるとき,

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2\pi n) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1)$$

であることを示せ. ただし, 上式で $\ln r$ は実関数の対数関数である.

(解)

$$\begin{aligned}\log z &= \ln r e^{i\theta} \\ &= \ln r + \ln e^{i\theta}\end{aligned}$$

ここで $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi n)}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) なので,

$$\begin{aligned}\log z &= \ln r + \ln e^{i(\theta+2\pi n)} \\ &= \ln r + i(\theta + 2\pi n)\end{aligned}$$

よって示された.

1-2. 冪関数 $w = z^a$ (a : 複素数) は, $z^a = e^{a \log z}$ と定義される. これにより, 次の 2 つの複素数をそれぞれ極形式にて表せ.

$$i^i, \quad 1^{\sqrt{2}}$$

(解)

$$\begin{aligned}\log i &= \ln e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)} \\ &= i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}i^i &= e^{i \log i} \\ &= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)}\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\log 1 &= \ln e^{i(0 + 2\pi n)} \\ &= i2\pi n\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}1^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2} \log 1} \\ &= e^{2\sqrt{2}i\pi n}\end{aligned}$$

となる.