

問3 偏微分方程式

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} (0 \leq x \leq 1, t \geq 0) \quad (1)$$

の解 $f(x, t)$ が次の初期条件と境界条件を満たすものとする.

$$f(x, 0) = g(x) \quad (2)$$

$$f(0, t) = f(1, t) = 0 \quad (3)$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

- 3-1. 変数分離の形 ($f(x, t) = u(x)v(t)$) で (3) 式を満たす微分方程式 (1) の解をすべて求めよ.(ここでは,(2) 式の条件は考慮しなくてよい.)

$$f(x, t) = u(x)v(t)$$

これを (1) 式に代入して

$$\begin{aligned} u(x)v'(t) &= u''(x)v(t) \\ \frac{u''(x)}{u(x)} &= \frac{v'(t)}{v(t)} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで, $u(x), v(t)$ は互いに独立なので,(4) 式が成り立つにはその値が定数でなければならない. その値を λ とする

$$u''(x) = \lambda u(x)$$

$$v'(t) = \lambda v(t)$$

(i) $\lambda \geq 0$ のとき

$$u(x) = A \exp(\sqrt{\lambda}x)$$

$$v(t) = B \exp(\lambda t)$$

となり,

$$f(x, t) = C \exp(\sqrt{\lambda}x + \lambda t)$$

となるが,(2),(3) を満たす $f(x, t)$ は $C = 0$ のときのみだが, $f(x, t) = 0$ になってしまうのでここでは考えないことにする.

(ii) $\lambda < 0$ のとき

$\lambda = -\alpha^2$ とおくと (α : 実数)

$$u''(x) = -\alpha^2 u(x)$$

$$v'(t) = -\alpha^2 v(t)$$

$$u(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x)$$

$$v(t) = C \exp(-\alpha^2 t)$$

$$f(x, t) = \exp(-\alpha^2 t)(A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x)) \quad (5)$$

ここで, (3) 式を考慮する,

$$f(0, t) = B \exp(-\alpha^2 t) = 0$$

$$B = 0$$

$$f(1, t) = \exp(-\alpha^2 t)(A \sin(\alpha)) = 0$$

上式を満たすには, $A = 0, \alpha = n\pi$ (n は正の整数) の二通りの場合があるが, $A = 0$ の場合 $f(x, t) = 0$ となってしまうのでここでは考えない. よって

$$\alpha = n\pi$$

$$f(x, t) = A_n \exp(-(n\pi)^2 t) \sin n\pi x \quad (6)$$

(1) の解は (6) 式の重ね合わせで表わされるため, (1) のすべての解は,

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-(n\pi)^2 t) \sin n\pi x \quad (7)$$

である.

3-2. 前問 3-1 で得られた $u(x)$ のうち, 任意の 2 つの解が満たす直交関係を書き下し, 実際にそれが満たされていることを示せ.

任意の 2 つの解を $A_n \sin n\pi x$ と $A_m \sin m\pi x$ とすると (n, m : 正の整数), 直行関係は以下のように書ける.

$$\int_0^1 A_n A_m \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \frac{1}{2} A_n A_m & (n = m) \end{cases}$$

以下では上式を証明する. なお, 係数部分の A_n, A_m は証明には直接影響しないので係数部分は考えずに議論を進める.

(i) $n \neq m$ のとき

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(n-m)\pi x - \cos(n+m)\pi x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(n-m)\pi} \sin(n-m)\pi x - \frac{1}{(n+m)\pi} \sin(n+m)\pi x \right]_0^1 \end{aligned}$$

ここで, $n-m, n+m$ はともに整数なので, $\sin$ の値は 0 になる. ゆえに右辺の値は 0 になる。

(ii) $n = m$ のとき

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_0^1 (\sin n\pi x)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 1 - \cos 2n\pi x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2n\pi} \sin 2n\pi x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

以上, (i)(ii) より実際に満たされていることが示された.

3-3. さらに (2) 式も満たす解は, 3-1 で求めた解の重ね合わせで表わされる. 3-2 で示した直交関係を用いて,

$$g(x) = |\sin(2\pi x)| \quad (8)$$

の場合に対し, 解 $f(x, t)$ を求めよ.

(6) 式において,(2) 式と (8) 式を代入すると,

$$A_n \sin n\pi x = |\sin(2\pi x)|$$

ここで, 両辺に $\sin m\pi x$ をかけ 0 から 1 まで x で積分する.

$$A_n \int_0^1 \sin m\pi x \sin n\pi x dx = \int_0^1 \sin m\pi x |\sin(2\pi x)| dx$$

3-2 の結果を用いることにより, $n = m$ のとき

$$\frac{1}{2} A_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin n\pi x \sin 2\pi x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin n\pi x \sin 2\pi x dx$$

$$A_n = \frac{2}{(n+2)\pi} \sin \frac{(n+2)}{2} \pi - \frac{2}{(n-2)\pi} \sin \frac{(n-2)}{2} \pi$$

k を整数として,

$n = 2k$ のとき

$$A_n = 0$$

$n = 2k + 1$ のとき

$$A_n = \frac{2}{(2k+3)\pi} \sin \frac{2(k+1)+1}{2} \pi - \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin \frac{2k-1}{2} \pi$$

$$A_n = \frac{2}{(2k+3)\pi} + \frac{2}{(2k-1)\pi}$$

$$A_n = \frac{4(k+1)}{(2k+3)(2k-1)\pi}$$

以上により, 求める解 $f(x, t)$ は

$$f(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(k+1)}{(2k+3)(2k-1)\pi} \exp(-(2k+1)^2 t) \sin(2k+1)\pi x$$

である.