問題 I

■問 3　質量 m を電荷 $e>0$ を持つ古典粒子が，電磁場中を運動している．この粒子に対するラグラジアン L は次式で与えられる．

$$L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)=\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2+e\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}-e\phi$$

ここで，$\dot{\boldsymbol{r}}=d\boldsymbol{r}/dt$ は速度，また $\phi=\phi(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ はそれぞれ電磁場のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルである．

3-1　運動方程式が次式で与えられることを示せ．

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=e\boldsymbol{E}+e\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B} \tag{1}$$

ただし，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は次式で与えられる電磁場である．

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

解

ラグランジアンの式より，

$$dL=m\dot{\boldsymbol{r}}d\dot{\boldsymbol{r}}+ed\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}+e\boldsymbol{A}\cdot d\dot{\boldsymbol{r}}-ed\phi$$

よって，

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}=m\dot{\boldsymbol{r}}+e\boldsymbol{A}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}}=e\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})-e\nabla\phi$$

オイラーラグランジュの方程式に代入すると，

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\Big)-\frac{\partial L}{\partial t}=m\ddot{\boldsymbol{r}}+e\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-e\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})+e\nabla\phi=0$$

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -e\nabla\phi - e\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + e\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})$$

$$= e\boldsymbol{E} + e\dot{\boldsymbol{r}} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

$$= e\boldsymbol{E} + e\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}$$

となる．

以下，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が一定の場合を考える．デカルト座標系を採用し，$\boldsymbol{B}$ の向きを z 方向に選ぶ．すると，成分表示で $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ と表せる．

3-2　運動の際に $\varepsilon = \dfrac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r}$ で定義される ε が保存されることを示せ．
解
（1）より

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E} + e\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}$$

これに $\dot{\boldsymbol{r}}$ をかけて変形すると，

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2\right] = e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{E} + e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}) = e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{E}$$

よって，

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon + e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r}) = e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{E}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -e\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{r}$$

今，$\boldsymbol{E}$ は定常なので $\dot{\boldsymbol{E}} = 0$ となる．よって，

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$$

となる．従って，エネルギー ε は保存される．

3-3　$\boldsymbol{E} = 0$ の場合について，時刻 $t = 0$ に $\dot{\boldsymbol{r}} = (v_0, 0, 0)$ の状態にあった粒子の $t > 0$ における速度 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ を求めよ．これはどのような運動か．
解
$\boldsymbol{E} = 0$ より

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B} = (B\dot{y}, -B\dot{x}, 0)$$

よって各成分の運動方程式は,

$$m\ddot{x} = eB\dot{y} \tag{2}$$

$$m\ddot{y} = -eB\dot{x} \tag{3}$$

$$m\ddot{z} = 0 \tag{4}$$

となる.（4）式より，$\ddot{z}(t) = 0$，$\dot{z}(t) = \alpha_0$（α_0 は定数）である．初期条件を考えると，$\dot{z}(0) = 0$ より $\dot{z}(t) = 0$ となる．

（2）+（3）i より，

$$\begin{aligned} m\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) &= eB(\dot{y} - i\dot{x}) \\ &= ieB(\dot{x} + i\dot{y}) \end{aligned}$$

ここで $\dot{x} + i\dot{y} = \dot{C}$ と置くと，

$$m\frac{d\dot{C}}{dt} = ieB\dot{C}$$

$$\ddot{C} = \frac{ieB}{m}\dot{C}$$

となる．$\dot{C} = \exp\lambda t$ と置くと，

$$\lambda - \frac{ieB}{m} = 0$$

$$\lambda = \frac{ieB}{m}$$

よって,

$$\dot{C}(t) = A\exp\frac{ieB}{m}t$$

$$= A\Big[\cos\frac{eB}{m}t + i\sin\frac{eB}{m}t\Big]$$

A は定数．今，$\dot{x} = \Re\dot{C}$，$\dot{y} = \Im\dot{C}$ なので，

$$\begin{cases} \dot{x} = A\cos\dfrac{eB}{m}t \\ \\ \dot{y} = A\sin\dfrac{eB}{m}t \end{cases}$$

となる．初期条件より，$\dot{x}(0) = v_0$，$\dot{y}(0) = 0$ より $A = v_0$ である．
よって，

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \left(v_0\cos\frac{eB}{m}t, v_0\sin\frac{eB}{m}t, 0\right)$$

となる．これは，z 一定の円運動である．

3-4　y 方向に静電場 $\boldsymbol{E} = (0, E, 0)$ がある場合について，$t = 0$ において原点に静止していた $t > 0$ における速度 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ と位置 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ．また，xy 面内における軌跡 $\boldsymbol{r}(t)$ の概形を描け．

解

運動方程式は，

$$m\ddot{x} = eB\dot{y} \tag{5}$$

$$m\ddot{y} = eE - eB\dot{x} \tag{6}$$

$$m\ddot{z} = 0 \tag{7}$$

となる．（7）式より，$\ddot{z}(t) = 0$，$\dot{z}(t) = \alpha_1$，$z(t) = \alpha_1 t + \beta_1$（$\alpha_1$，$\beta_1$ は定数）である．初期条件を考えると，$\dot{z}(0) = 0$，$z(0) = 0$ より $\alpha_1 = \beta_1 = 0$．よって $\dot{z}(t) = 0$，$z(t) = 0$ となる．

（5）+（6）i は，

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x + iy) = ieB\frac{d}{dt}(x + iy) + ieE$$

となる．$x + iy = C$ とすると，

$$m\ddot{C} = ieB\dot{C} + ieE$$

$$= ieB\left(\dot{C} + \frac{E}{B}\right)$$

よって,

$$\ddot{C} = \frac{ieB}{m}\left(\dot{C} + \frac{E}{B}\right)$$

となる. $\dot{C} + \dfrac{E}{B} = \exp \gamma t$ と置くと,

$$\gamma - \frac{ieB}{m} = 0$$

$$\gamma = \frac{ieB}{m} \tag{8}$$

よって,

$$\dot{C} = -\frac{E}{B} + D\left[\cos\frac{eB}{m} + i\sin\frac{eB}{m}\right] \tag{9}$$

D は定数. 今, $\dot{x} = \Re\dot{C}$, $\dot{y} = \Im\dot{C}$ なので,

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{E}{B} + D\cos\dfrac{eB}{m}t \\ \\ \dot{y} = D\sin\dfrac{eB}{m}t \end{cases}$$

$\dot{x}(0) = 0$ より, $D = \dfrac{E}{B}$ である. よって,

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \left(\frac{E}{B}\left(\cos\frac{eB}{m}t - 1\right), \frac{E}{B}\sin\frac{eB}{m}t, 0\right)$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{meE}{B^2}\left(\sin\frac{eB}{m}t - t\right), -\frac{meE}{B^2}\cos\frac{eB}{m}t, 0\right)$$

となる. これは, 中心の移動速度が $\dot{x} = -\frac{E}{B}$, $\dot{y} = 0$ の円運動を表す.