

問2 長さ l の糸の一端を固定し, 他端に質量 m の小球を付けて, 鉛直面内に振動させる.
重力加速度を g , また鉛直方向と糸のなす角を θ として, 以下の問に答えよ.

2-1. 小球の運動方程式を求めよ.

(解)

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

2-2. 時刻 $t = 0$ において $\theta(t = 0) = \theta_0$ の位置から小球を静かに放した. ここで定数 θ_0 は条件 $0 < \theta_0 \ll 1$ を満たすものとする. 方程式を解き, $t > 0$ における $\theta(t)$ を求めよ.

(解) 初期条件は

$$\theta(t = 0) = \theta_0$$

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

である.

また, $0 < \theta_0 \ll 1$ より

$$\sin \theta_0 \cong \theta_0$$

θ が $0 < \theta \leq \theta_0$ の範囲で変化すると考えると, $\sin \theta \cong \theta$ とすることができる.
これにより,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

ここで θ の特解を $\theta = \exp(\lambda t)$ とおくと

$\lambda = i\sqrt{\frac{g}{l}}$ となるので, θ は

$$\theta(t) = A \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t + B \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t$$

となる.

初期条件より,

$$\theta(0) = B = \theta_0$$

また, $\frac{d\theta}{dt}|_{t=0} = \sqrt{\frac{g}{l}}A = 0$ より

$$A = 0$$

これにより

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t$$

が求まる.

2-3. 振動の周期 T を求めよ.

(解) 周期 T は

$T = \frac{2\pi}{\lambda}$ と表せるので, 振動の周期 T は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

である.

次に, 小球には速度 v に比例する摩擦力 $F = -2m\gamma v$ (γ は正定数) が働くものとして, この微小振動に対する摩擦の影響を考察する. 小球は, 2-2 の場合と同様に, $\theta(t=0) = \theta_0 \ll 1$ の位置から静かに離す.

2-4. この場合の運動方程式を書き下せ.

(解)

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta - 2ml\gamma \frac{d\theta}{dt}$$

2-5. 小球の振動が可能であるための γ に対する条件, すなわち, 小球が $\theta = 0$ を通過するための γ の条件を求めよ.

(解) 2-2 と同様に $\sin \theta \cong \theta$ となるので,

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg\theta - 2ml\gamma \frac{d\theta}{dt}$$

となる. また, θ の特解を $\theta = A \exp(\lambda t)$ とすると, 運動方程式に代入することにより,

$$l\lambda^2 + 2l\gamma\lambda + g = 0$$

となる.

ここで, 小球が $\theta = 0$ を通過するには, 小球が振動するような運動になればよい. つまり, 上式が虚数解をもてば小球は振動するような運動になり, $\theta = 0$ を通過することができる. そこで, 判別式を D とすると,

$$D = 4l^2\gamma^2 - 4lg < 0$$

$$\gamma^2 < \frac{g}{l}$$

$$-\sqrt{\frac{g}{l}} < \gamma < \sqrt{\frac{g}{l}}$$

これが, 求める γ の条件である.

2-6. 前問の条件が満足される場合について運動方程式を解き, $\theta(t)$ を求めよ.

(解) 初期条件は 2-2 のときと同じである.

2-5 の条件下において, λ は

$$\lambda = -\gamma \pm i\sqrt{\frac{g - l\gamma^2}{l}}$$

とあらわすことができる.

ここで, $\omega = \sqrt{\frac{g - l\gamma^2}{l}}$ とおくと, θ は,

$$\theta(t) = A \exp(-\gamma t) \cos \omega t + B \exp(-\gamma t) \sin \omega t$$

となる.

初期条件より $\frac{d\theta}{dt}|_{t=0} = 0$ なので,

$$\dot{\theta}(0) = -A\gamma + B\omega = 0$$

また, $\theta(0) = \theta_0$ より,

$$A = \theta_0$$

よって,

$$B = \frac{\gamma}{\omega} \theta_0$$

以上により, 求める $\theta(t)$ は,

$$\theta(t) = \theta_0 \exp(-\gamma t) \left(\cos \omega t + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t \right)$$

$$\text{ただし, } \omega = \sqrt{\frac{g - l\gamma^2}{l}}$$

2-7. 振動の周期 T および振幅が e^{-1} 倍になるまでの時間 τ を書き下せ. また $\theta(t)$ の概形を t の関数としてかけ.

(解) 周期 T は 2-3 同様

$T = \frac{2\pi}{\lambda}$ で表わされるので, 振動の周期 T は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - l\gamma^2}}$$

となる.

また, 振幅は $\theta_0 \exp(-\gamma t)$ の部分で表わされる.

振幅が e^{-1} 倍になるときの振幅は $\theta_0 e^{-1}$ であり, このときの時間が τ であるので,

$$-\gamma\tau = -1$$

より

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

である.