

原始火星大気による火星衛星の捕獲起源説

— 捕獲と衛星軌道の進化のタイムスケール —

Capture scenario of Martian moons by Martian primary atmosphere

— Timescales of capture and orbital evolution of satellite —

松岡 亮

Matsuoka Ryo

学籍番号 : 02122072

北海道大学 理学部 地球惑星科学科
惑星宇宙グループ

Planetary and Space Group,
Department of Earth and Planetary Sciences,
School of Science, Hokkaido University.

指導教官 : 倉本 圭 教授

2016/04/01

目次

1	イントロダクション	3
2	火星の衛星	4
2.1	火星の衛星の特徴	4
2.1.1	衛星の軌道	4
2.1.2	形態的特徴	4
2.1.3	スペクトル	5
2.2	その場形成説	6
2.2.1	ジャイアントインパクト説	6
2.2.2	共形成説	6
2.2.3	潮汐破壊説	7
2.3	捕獲説	7
2.3.1	潮汐散逸説	7
2.3.2	抗力捕獲説	7
3	抗力捕獲のための力学	8
3.1	抗力	8
3.2	Hill 方程式	8
4	火星衛星の捕獲と軌道進化	11
4.1	一次大気の構造	11
4.2	捕獲と軌道進化	12
4.2.1	抗力時間	12
4.2.2	真円化時間	13
5	数値シミュレーション	14
5.1	Runge-Kutta 法	14
5.2	リープ・フロッグ法	14
5.2.1	リープ・フロッグ公式	14
5.2.2	シンプレクティック数値積分法としてのリープ・フロッグ法	15
5.3	各積分スキームの実装	17
5.3.1	積分スキームの併用	17
5.3.2	Hill 系における速度項の取り扱い	17
5.4	設定条件	18
6	結果	20
6.1	2 体計算	20
6.2	3 体計算	21

7	議論と展望	27
7.1	軌道進化のタイムスケール	27
7.2	軌道エネルギーの散逸	27
8	まとめ	29
付録 A	Lagrange の惑星方程式	31
A.1	a に関する Lagrange の惑星方程式	31
A.1.1	導出	31
A.1.2	実装	31
A.2	e に関する Lagrange の惑星方程式	33
A.2.1	導出	33
A.2.2	標構の変更	34
付録 B	離心率変化の見積もり	36
付録 C	真円化時間の見積もり	38
C.1	離心近点角	38
C.2	Lagrange の惑星方程式の変形	39
C.3	軌道進化	40
C.4	時間と離心率の関係	42
C.5	抗力時間を用いた表示	44
参考文献		45

1 イントロダクション

火星はフォボス、ダイモスという2つの衛星を有している。両衛星への多くのフライバイ観測によって得られたデータは、炭素質小惑星との類似を指摘しており、炭素質天体が火星重力によって捕獲されたものであると考えられてきた（捕獲説）。しかしながら、両衛星の軌道が真円に近く、また、その軌道傾斜角が非常に小さいという事実は、捕獲説と調和しないとも考えられている。これらの事実は両衛星のその場形成説を強めるものとされてきた一方で、捕獲後に潮汐や抗力によるエネルギー散逸等の過程を経験した可能性をほのめかす。そこで、本論文では、原始火星大気による抗力捕獲に着目し、その捕獲の可能性とタイムスケールをシミュレーションによって明らかにしたいと考えている。

フォボスとダイモスが炭素質天体である可能性があるという期待から、両衛星は太陽系初期の有機物環境を、熱変成を受けずに保存している可能性がある天体として注目されている。さらに、火星衛星の存在は、初期太陽系における太陽系外縁部からの揮発性物質の流れの証拠となるかもしれない。この揮発性物質の流れは、地球の海洋、さらには生命圏の形成にとって重要なプロセスだったと考えられている。また、両衛星の起源が捕獲かその場形成かに依らず、太古の火星の環境を保存している可能性もある。これらの理由から、日本では火星衛星の探査、特にフォボス土壌のサンプルリターン (Mars Moon eXploration, MMX) を計画しており、2022年度の打ち上げが予定されている。本論文の「議論」の節では、サンプルリターンで得られると期待できる情報と、原始大気による抗力捕獲説の関連性についても言及する。

本論文では、はじめに火星の衛星の特徴とその起源論の現状について概説する。火星の衛星の起源論は、火星の衛星の種々の特徴と密接に関わっていると考えられているためである。その次に、火星の衛星の捕獲説、特に原始火星大気による抗力捕獲説に着目し、それを検証するための基本的な物理と数値計算法について議論する。最後に、実際に行った数値計算の結果と、その結果に対する考察と議論を行い、まとめとする。本論文での種々の議論で用いた数式は、基本的にその場で証明を載せているが、長いものは「付録」に載せている。

2 火星の衛星

2.1 火星の衛星の特徴

火星には、フォボスとダイモスという二つの衛星がある。本小節では、その特徴を示す。

2.1.1 衛星の軌道

フォボスとダイモスの軌道要素を Tab. 2.1 に示す。この表における軌道傾斜角の値は、火星赤道面に対する値である。フォボスは火星の共回転半径 ($5.9 R_M$, R_M は火星半径) よりも内側に、ダイモスはやや外側に位置している。この表から、両衛星は非常に均整のとれた軌道、すなわち真円に近く、傾きが非常に小さい軌道を有していることがわかる。

Tab. 2.1 フォボスとダイモスの軌道要素 (Rosenblatt, 2011).

	フォボス	ダイモス
軌道長半径 [km]	9375.0 ($2.76 R_M$)	23458.0 ($6.91 R_M$)
軌道離心率	0.01511	0.00024
軌道傾斜角 [$^{\circ}$]	1.0756	1.7878
公転周期	7 h 39' 19.47"	30 h 18' 1.36"

また、フォボスとダイモスは潮汐力により自転と公転が同期していて、共回転半径よりも内側のフォボスは潮汐力により火星側へ徐々に軌道がずれている。その軌道減衰率はおおよそ 20 cm/yr である (Lainey *et al.* 2007; Jacobson 2010)。一方、ダイモスは共回転半径よりも外側にあるため、火星から離れる方向へ徐々に軌道が後退していると予想されているが、その大きさはフォボスの 1% 未満と見積もられており (Burns 1992)、観測ではとらえきれていない。

2.1.2 形態的特徴

Tab. 2.2 にフォボスとダイモスの半径・質量・密度を示す。また、Fig. 2.1 に Mars Reconnaissance Orbiter (MRO) の HiRISE (High Resolution Imaging Science Experiment) によるフォボスとダイモスの画像を載せる。この画像は可視-近赤外領域における疑似カラー画像である。

表と画像からわかるように、フォボス及びダイモスは非常に小さく、不規則な形状をしている。また、両衛星はアルベドが数%と非常に小さく、形態的特徴と合わせて、低アルベド小惑星の特徴と一致するものが多い。

フォボスは多くのクレーターに覆われており、直径 10 km ほどの非常に大きなクレーター、スティックニー・クレーターがある (Fig. 2.1 のフォボス画像右側)。一方で、ダイモスは、非常に滑らかな外観をしていて、クレーターが目立たないが、これは、厚いレゴリス層のためであると考えられている。また、フォボスには groove と呼ばれる溝が認められ、その起源については、潮汐による破壊 (*e.g.* Benjamin *et al.* 2015) の結果生じたものとする説や、スティックニー・クレーター形成時の放出物による二次クレーター列であるという説 (Hamelin 2011)、火星からの衝突放出物による二次クレーター列だという説 (Murray *et al.* 2006) が提案されている。

両衛星の密度の低さも特筆すべき点である。この密度はラブルパイル天体と同程度に小さく (*e.g.* イトカ

ワ : 1.9 g/cm^3), 両衛星の内部は空隙や軽い物質 (氷など) を含んでいることが予想されている。

Tab. 2.2 フォボスとダイモスの半径・質量・密度 (Rosenblatt, 2011).

	フォボス	ダイモス
半径 [km]	$13.0 \times 11.39 \times 9.07$	$7.5 \times 6.1 \times 5.2$
質量 [kg]	$(1.06 \pm 0.03) \times 10^{16}$	$(1.51 \pm 0.03) \times 10^{15}$
密度 [g/cm^3]	1.85 ± 0.07	1.48 ± 0.22

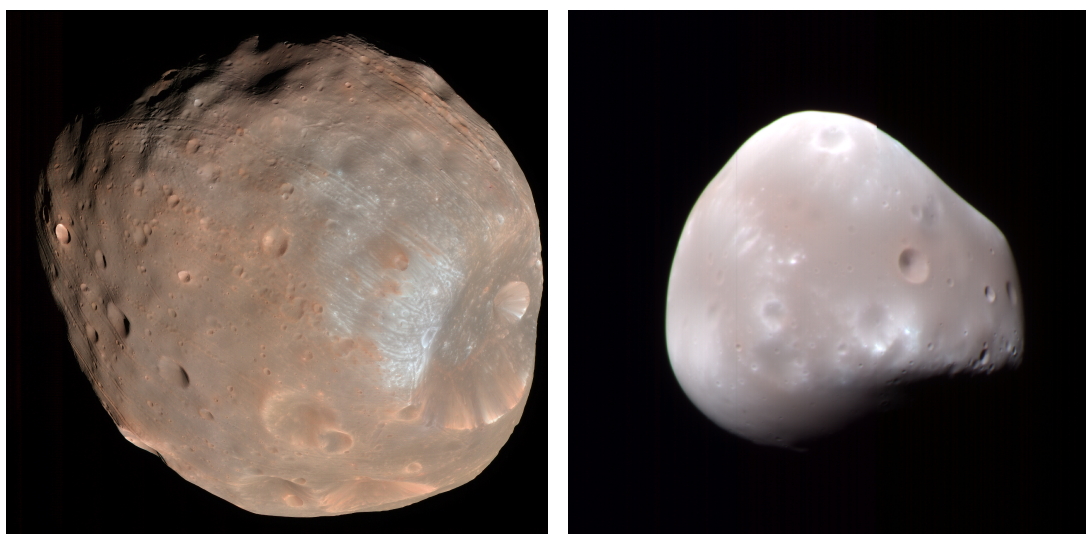


Fig. 2.1 左 : フォボス, 右 : ダイモス (NASA/JPL-Caltech/University of Arizona).

2.1.3 スペクトル

Fig. 2.2にフォボス及びダイモスと小惑星の可視-近赤外反射スペクトルの比較図を載せる。このスペクトルにおける反射率の値は 550 nm で正規化してある。ハッブル宇宙望遠鏡や Phobos-2 探査機による可視-近赤外反射スペクトルのデータは、両衛星の反射スペクトルが D 型及び T 型小惑星のそれによく適合するというを示している。D 型小惑星はメインベルト外縁から木星トロヤ群にかけて分布している小惑星であり、T 型小惑星はメインベルトの内側に分布している。これらの小惑星は低アルベドであり、炭素質の組成を有すると考えられている (Nelson *et al.* 1993)。

フォボスには、異なるスペクトルを持つ 2 つの領域が存在することが知られている。フォボスの後行半球の可視-近赤外反射スペクトルは、先行半球のそれと比較して、より赤化したスペクトルを有している。このことから、後行半球、先行半球はそれぞれ、フォボス赤領域 (Phobos Red Unit, PRU)、フォボス青領域 (Phobos Blue Unit, PBU) と呼ばれている。小惑星のスペクトル型で言えば、PRU は D 型小惑星、PBU は T 型小惑星の反射スペクトルに似ている。また、ダイモスには、フォボスのようなスペクトルの多様性は認められず、全体的に PRU に似たスペクトル、すなわち D 型小惑星に類似のスペクトルを有する。

これらのスペクトルのデータは、フォボスやダイモスが炭素質小惑星と同じ物質、すなわち炭素質物質で構成されていることを示唆するものである。しかしながら、フォボスとダイモスは、これまでにサンプルリター

ンが行われていないため、その組成は分光観測の結果や密度を用いて推定することしかできない。特に、反射スペクトルは表面の数 μm の物質の情報しか有しておらず、内部にまでわたる物質組成を制約するものとはなっていない。

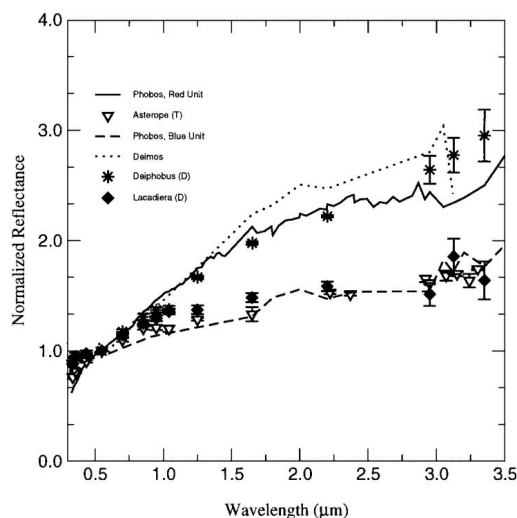


Fig. 2.2 フォボス・ダイモスと小惑星の反射スペクトルの比較 (Rivkin *et al.* 2002).

2.2 その場形成説

火星の衛星が周火星領域で集積形成されたとする説がその場形成説 (*in-situ* formation scenario) である。この説は、現在の火星衛星の真円に近く、傾斜角が小さい軌道を説明することができ、また、両衛星の密度の低さを、デブリの集積の結果として説明できる可能性がある。その場形成説の代表的なものには、ジャイアントインパクト説や共形成説、潮汐破壊説がある。

2.2.1 ジャイアントインパクト説

火星の衛星が地球の月の場合と同様に、大天体の衝突デブリの集積で形成されたとするのがジャイアントインパクト説である (*e.g.* Craddock 1994, 2011; Citron *et al.* 2015)。実際、火星の表面には、北部平原 (Borealis basin) やヘラス平原、エリシウム平原のように、大天体衝突の痕跡だと考えられている地形がある。しかし、例えば衝突天体が炭素質天体であったとしても、有機物がデブリ円盤の中で再凝縮できない可能性があり、この場合は可視-近赤外反射スペクトルの制約と調和しない。また、ダイモスの密度の低さを説明するために、ダイモスが集積天体として形成されるには、同期軌道を超えるとところにまでデブリ円盤が広がらなければならない、これはとても厳しい条件であると言える。

2.2.2 共形成説

共形成説では、火星の衛星が火星近傍で同時に形成されたとする (Safronov *et al.* 1986)。しかし、この場合は、衛星は火星の材料物質と同一の組成を持つていなければならない、炭素質組成を持つとする可視-近赤外反射スペクトルの制約と調和しない。

2.2.3 潮汐破壊説

潮汐破壊説は、かつての大衛星が火星の Roche 半径に達して、破壊されたときに生じるデブリの集積物が現在の衛星となったということを主張するものである (Singer 2007). この場合は、母天体である大衛星が炭素質の組成を持つと仮定することで、両衛星で想定されている組成を説明することができるかもしれない. また、火星の楕円クレーターが、潮汐破壊デブリの火星への衝突で生じたものであるとする意見がある (Schults & Lutz-Garihan 1982).

ただし、火星の Roche 半径は、火星中心から 2 火星半径のところにある. このことはダイモスの起源の説明を困難にする. なぜならば、Roche 半径付近で崩壊した天体が共回転半径 ($5.9 R_M$) を超えたところにまでデブリを散らすことは考えづらいからである.

2.3 捕獲説

フォボス及びダイモスが捕獲された小惑星であるとする説が捕獲説 (capture scenario) である. この説では、両衛星の可視-近赤外反射スペクトルの制約と調和させることができるが、天体の捕獲自体が力学的に困難であることと、現在の真円に近く、傾斜角が小さい軌道を説明できないという困難が存在する. これらを説明するために、軌道エネルギーの散逸過程を考えなければならず、潮汐散逸説と抗力捕獲説の 2 つが代表的な説として知られている.

2.3.1 潮汐散逸説

捕獲後に、潮汐摩擦による軌道エネルギーの散逸が起こり、軌道が真円化されたとするのが潮汐散逸説である (*e.g.* Burns 1992). 有意な潮汐散逸が起こるためには、両衛星の剛性率や粘性率が低いことが要求される. このことは、単一岩体的な描像と一致しないが、両衛星の密度から想定されているように、衛星内部に空隙や氷が有意に含まれていれば、フォボスについては真円化に足るほどの剛性率・粘性率の低さを達成することができるかもしれない. 一方、ダイモスの場合は、軌道が火星から遠いために、潮汐力による真円化は困難であると考えられている (Lambeck 1979; Szeto 1983).

また、潮汐力のみで軌道傾斜角を低下させるのは困難である (Burns 1992).

2.3.2 抗力捕獲説

火星の大気による抗力で軌道エネルギーが散逸したとするのが抗力捕獲説である (*e.g.* Hunten 1979; Sasaki 1990). これは、幾つかの木星型惑星の衛星の起源論でも提唱されている説である. 現在の火星の薄い大気では抗力による軌道エネルギー散逸を考えるのは困難であるが、原始太陽系星雲が集積した厚い 1 次大気を考えれば、衛星が存在するような十分に高い高度でも、軌道エネルギーの散逸を考えることができる.

原始太陽系星雲が集積した球対称 1 次大気を想定し、それによる抗力で捕獲・軌道エネルギー散逸が起こるタイムスケールを見積もることが本論文の目的の一つである. その意義は 4.2 節で論じる.

3 抗力捕獲のための力学

3.1 抗力

流体中の物体には、流体との速度差に起因する抗力（慣性抗力）がかかる。密度 ρ の流体中を断面積 S の物体が運動するときにかかる抗力 \mathbf{D} は、

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{2}\rho S C_D \mathbf{v} \mathbf{v} \quad (3.1)$$

と表される。ここで、 \mathbf{v} は流体に対する物体の速度、 $v = |\mathbf{v}|$ （速さ）である。また、 C_D は抗力係数という無次元量であり、物体の形状や Reynolds 数で変化するが、今回は超音速での進入を仮定し、 $C_D = 1.0$ とおいた。

運動する物体が半径 R の球形で、密度が ρ_s であるとき、単位質量あたりの抗力（抗力加速度）は、

$$\frac{\mathbf{D}}{m} = -\frac{1}{2}\rho \frac{\pi R^2}{\frac{4}{3}\rho_s \pi R^3} C_D \mathbf{v} \mathbf{v} = -\frac{3}{8} \frac{\rho}{\rho_s} \frac{1}{R} C_D \mathbf{v} \mathbf{v} \quad (3.2)$$

という表示が可能である。この式は、物体の半径が大きくなればなるほど抗力の影響を受けやすくなるということを示している。

3.2 Hill 方程式

本論文で扱う系は、衛星（ないしその候補天体、以後は粒子と呼ぶ）、火星、太陽で構成されており、抗力項が存在する円制限 3 体問題として扱うことができる。つまり、粒子が火星や太陽に及ぼす重力、火星が太陽へ及ぼす重力を無視することができ、なおかつ、火星は離心率が小さいために真円の軌道を巡っていると仮定することができる。座標原点を太陽に置いた慣性座標系を考えれば、粒子の運動方程式は、

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \left(\frac{M_s}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} + \frac{M_m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \right) - \frac{3}{8} \frac{\rho_a(\mathbf{r})}{\rho} \frac{1}{R} C_D |\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{v}_a(\mathbf{r})| (\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{v}_a(\mathbf{r})) \quad (3.3)$$

と書き表される。ここで、 \mathbf{r} は粒子の位置ベクトルで、上付きドットは時間微分を表す。また、 G は万有引力定数、 M は天体質量、添え字 m は火星、 s は太陽、 a は火星大気を表す。しかし、ここでは、この方程式を直接解くことはせず、円制限 3 体問題のもとで近似的に成立する Hill 方程式を解くことにする。

Hill 方程式は、ある惑星近傍の天体を、その惑星を原点にしつつ、その惑星とともに太陽の周りを円運動している座標系（Hill 座標系）で記述し、さらに惑星近傍において太陽重力を線型近似（Hill 近似）して得られる運動方程式である。

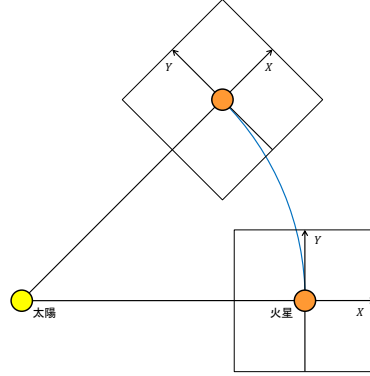


Fig. 3.1 火星近傍 Hill 座標系 (X, Y) の設定.

ここで、Hill 方程式を導出してみよう。粒子、惑星、太陽からなる 3 体重力系を考える。なお、惑星は太陽を中心とする真円の軌道を角速度 ω で周回しているとし、粒子は惑星のごく近傍に位置していると仮定する。太陽原点で等角速度 ω で回転している回転座標系での位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ における粒子の運動方程式は、

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_{\odot}}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} + \mathbf{F} + 2(\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega} \quad (3.4)$$

となる。ここで、 \mathbf{F} は粒子にかかる単位質量あたりの力のうち、太陽重力以外のもの（惑星からの重力、大気からの抗力など）で、 M_{\odot} は太陽質量である。また、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は、この座標系で $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ と書き表されるとする。太陽中心の回転座標系 (x, y, z) と Hill 座標系 $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ の間の変換式は、

$$X = x - a, \quad Y = y, \quad Z = z \quad (3.5)$$

であるが、これを用いて回転座標系の運動方程式を変換し、Hill 方程式を導く。ここで、 a は惑星の軌道長半径である。まずはじめに、太陽重力の線型化について議論する。 $|\mathbf{r}|^{-3}$ を Hill 座標系で表示すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} &= \frac{1}{\{(X+a)^2 + Y^2 + Z^2\}^{\frac{3}{2}}} \\ &= \left[a^2 \left\{ 1 + \frac{2X}{a} + \left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{a}\right)^2 + \left(\frac{Z}{a}\right)^2 \right\} \right]^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。ここで、粒子が惑星のごく近傍に位置していること、すなわち X, Y, Z が微小であることに注意して、1 次の Taylor 展開式：

$$(1+p)^n = 1 + np + O(p^2) \quad \text{as } p \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

を適用すれば、

$$\frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \approx \frac{1}{a^3} \left(1 - \frac{3X}{a} \right) \quad (3.8)$$

が従う。これによって、太陽重力の X 成分は、

$$\begin{aligned} -\frac{GM_{\odot}}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \Big|_X &\approx -\frac{GM_{\odot}}{a^3} \left(1 - \frac{3X}{a} \right) (X+a) \\ &= -\omega^2(X+a) + 3\omega^2 X + O(X^2) \quad \text{as } X \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

と線型化される．ここで，太陽重力と釣り合う遠心力 $GM_{\odot}/a^2 = a\omega^2$ を用いた．また，運動方程式 (3.4) の第 2 項目，Coriolis 力の X 成分は， $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ に注意して，

$$2(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\omega})|_X = 2\omega\dot{y} = 2\omega\dot{Y} \quad (3.10)$$

であり，第 3 項目，遠心力の X 成分は，

$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{\omega}|_X = \omega^2 x = \omega^2(X + a) \quad (3.11)$$

と計算できる．よって，式 (3.9), (3.10), (3.11) より，Hill 方程式の X 成分は，

$$\ddot{X} - 2\omega\dot{Y} - 3\omega^2 X - F_X = 0 \quad (3.12)$$

となる．同様の手順で，Hill 方程式：

$$\ddot{X} - 2\omega\dot{Y} - 3\omega^2 X - F_X = 0, \quad (3.13)$$

$$\ddot{Y} + 2\omega\dot{X} - F_Y = 0, \quad (3.14)$$

$$\ddot{Z} + \omega^2 Z - F_Z = 0 \quad (3.15)$$

が従う．

4 火星衛星の捕獲と軌道進化

4.1 一次大気の構造

本論文で扱う一次大気は、等温大気を仮定する。これは球対称大気である。火星衛星の高度程度のスケールを考えているため、静水圧で釣り合う重力ポテンシャルは r に依存するようになり、

$$\rho = \rho_p \exp \left\{ -\frac{\mu GM}{RT} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p} \right) \right\} \quad (4.1)$$

と与えられる。ここで、 ρ は大気密度、 μ は大気ガスの平均モル質量、 R は気体定数、 T は温度、 M は火星の質量、 G は万有引力定数である。また、添え字 p は近火点における値を表している。しかし、この状況においても、大気は火星近傍に集中しており、火星から離れたところにおける抗力によるエネルギー散逸は無視できる。よって、式 (4.1) の \exp 内の $-GM/r$ を $r \sim r_p$ で 0 次近似すれば、

$$\rho(r) = \rho_p \exp \left(-\frac{r - r_p}{H} \right) \quad (4.2)$$

が従う。ここで、

$$H = \frac{RT}{\mu} \frac{r_p^2}{GM} \quad (4.3)$$

であり、スケールハイトと呼ぶ。これは、大気の密度が基準面のその $1/e$ 倍になる高度を表している。あるいは、スケールハイトより下層には、惑星大気の質量の大部分が集まっていると計算できるため、スケールハイトは惑星大気の典型的な厚さを表しているとも言える。また、このようなスケールハイトの指数関数で表現される大気を指数型大気と呼ぶことにする。特に、本論文の計算では、静止した指数型大気を想定している。

ここで、実際のスケールハイトの大きさを求めてみよう。まず、 $r_p \sim 20000$ km とおく（概ねフォボスの 2 倍の距離、共回転半径）。これは、フォボスが現在でも潮汐作用によって内側に移動しているという事実から来るものである。つまり、かつてフォボスは現在よりも外側に軌道があつて、なおかつ内側への移動を引き起こすために初期位置は共回転半径よりも内側にあつたのだと期待できるからである*1。また、原始太陽系星雲内で火星軌道付近は概ね 300 K だとする。大気は太陽組成で $\mu \sim 2.2 \times 10^{-3}$ kg であると仮定すれば、

$$H \sim 11000 \text{ km} \quad (4.4)$$

と求められる。実際、Hunten (1979) では $H = 12000$ km としていて、本論文でも 12000 km という値で数値計算を行うことにしている。以上の計算によって、Hunten (1979) で想定しているスケールハイトの高さの妥当性を示すことができた。

本論文でのシナリオとは異なるが、より現実的なモデルも考えてみる。火星が 1 次大気として原始惑星系星雲ガスを引き込む際、このガスは Kepler 回転し、火星重力と遠心力のつり合いで円盤型の等温大気となることが期待できる。その大気の密度構造は、円柱座標系 (r, θ, z) で表せば、

$$\rho(r, z) = \rho_{\text{eq}}(r) \exp \left(-\frac{z^2}{H_z^2} \right), \quad (4.5)$$

$$\rho_{\text{eq}}(r) = \rho_0 \exp \left(-\frac{r - r_0}{H_r} \right) \quad (4.6)$$

*1 軌道が共回転半径よりも外側であれば、潮汐作用によって軌道は外側へ移動する。月、ダイモスなどがそうである。

となる。ここで、 H_z は z 方向のスケールハイト、 H_r は r 方向のスケールハイトである。また、 ρ_{eq} は赤道面における大気密度を表す。

4.2 捕獲と軌道進化

Fig. 4.1に指数型大気による捕獲と軌道進化の一例を示す。この例では、Hill 方程式を解いており、 $(0, 0)$ を惑星中心に置いている。また、惑星を取り巻く大気は指数型大気を想定している。

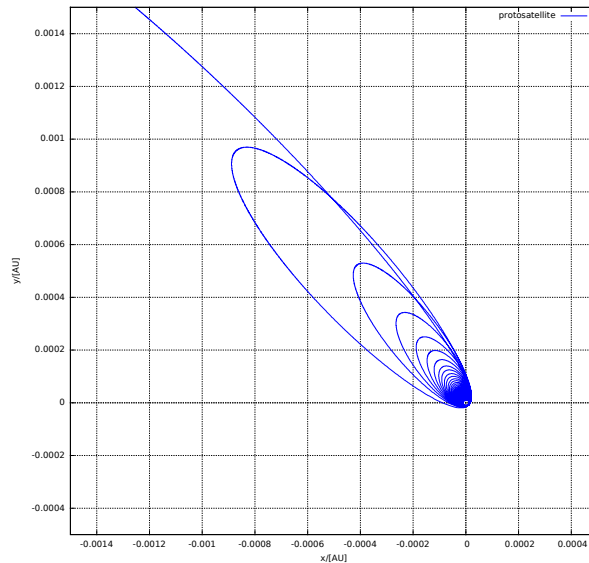


Fig. 4.1 軌道捕獲の例.

Hunten (1979) では、指数型大気による捕獲と軌道進化の過程は二つに分けることができると説明している。指数型大気は、軌道エネルギーの散逸の殆どが近火点付近の濃密な大気によって成されるため、捕獲時の最初の軌道進化は、近火点距離を保ちながら遠火点距離が縮小し、離心率が低下する過程（真円化過程）で説明される。離心率が十分に低下すると、その後は、ほぼ真円の軌道を保ちながら（離心率が0に近い状態を維持しながら）軌道が減衰・縮小していくような軌道進化をする（軌道縮小過程）。このように、抗力捕獲における天体の軌道進化は、真円化過程と軌道縮小過程の二つのプロセスから成る。

フォボス及びダイモスの軌道を説明するためには、大気の散逸を考えなければならない。なぜならば、捕獲後に衛星は、軌道縮小過程によって比較的短い寿命で火星に落下してしまうからである。フォボスないしダイモスが火星大気の抗力で捕獲されたのち、火星に落下せずある一定の軌道にとどまり続けるには、軌道進化のタイムスケールと同程度のオーダーで大気が散逸するということを考えなければならない。このことから、ガス抗力による捕獲衛星を論じるうえで、軌道進化のタイムスケールを見積もることは重要であると言える。

4.2.1 抗力時間

Kepler 速度での運動量 $p = mv_c$ を抗力の表式 (3.1) で除すことによって、抗力がかかる典型的な時間（抗力時間） T_d を定義することができる。

$$T_d = \frac{2m}{\rho_p S C_D v_c}. \quad (4.7)$$

ここで、 m は粒子の質量、 ρ_p は近火点における大気密度、 v_c は近火点での真円 Kepler 速度である*2。この抗力時間は、軌道進化におけるタイムスケールのオーダーを代表する時間であり、軌道進化はこの抗力時間の数倍のタイムスケールで成される。

4.2.2 真円化時間

離心率の進化を議論するために、最初の近火点通過における離心率変化の見積りを与える。スケールハイト H の指数型大気に覆われている火星を仮定し、最初の近火点通過で離心率が 1 から e_0 (ただし、 $1 \approx e_0$) に変化したとしたとき、離心率変化 $1 - e_0$ は次の式で見積もることができる。

$$\begin{aligned} 1 - e_0 &\approx \frac{2}{v_c T_d} \sqrt{2\pi r_p H} (1 + e_0) \\ &\approx \frac{4}{v_c T_d} \sqrt{2\pi r_p H} \quad \text{for } e \approx 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

この式の導出は付録 B で行う。また、離心率が約 0 になるまでに要する時間 (真円化時間) T_e は、

$$T_e \approx \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi r_p}{H}} \left(\frac{2}{\sqrt{1 - e_0}} - 2.38 \right) T_d \quad (4.9)$$

と見積もられる。この式の導出は付録 C で行う。

*2 真円 Kepler 速度とは、ある距離で真円の軌道の Kepler 力学系を仮定したときに実現される速度の事である。

5 数値シミュレーション

この節では、本研究で用いている数値積分法とその実装、設定条件について述べる。

5.1 Runge-Kutta 法

Runge-Kutta 法は、タイムステップの途中で微分を計算しなおし、それらの平均で時間発展を行う数値積分法である。Runge-Kutta 法は任意の次数のものを考えることができるが、計算量と精度の観点から、4 次の Runge-Kutta 法 (RK4, 古典的 Runge-Kutta 法) がよく用いられる。

1 階常微分方程式：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (5.1)$$

の数値積分における 4 次の Runge-Kutta 法は、以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \Delta t \overrightarrow{\text{RK}}_4(\mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i)) \\ &= \mathbf{x}_i + \frac{\Delta t}{6}(\mathbf{F}_1 + 2\mathbf{F}_2 + 2\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4) \end{aligned} \quad (5.2)$$

ここで、 $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_4$ は、

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i), \quad (5.3)$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{f}\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{x}_i + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{F}_1\right), \quad (5.4)$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{f}\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{x}_i + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{F}_2\right), \quad (5.5)$$

$$\mathbf{F}_4 = \mathbf{f}(t_i + \Delta t, \mathbf{x}_i + \Delta t\mathbf{F}_3). \quad (5.6)$$

で与えられる。これは中途のタイムステップにおける微分の加算平均の表式となっている。

5.2 リープ・フロッグ法

5.2.1 リープ・フロッグ公式

リープ・フロッグ法 (Leap-frog, 馬跳びの意) は、Hamilton 系のシミュレーションにおいてよい振る舞いを示すことが知られている数値積分法である。

リープ・フロッグ法は、次の式 (リープ・フロッグ公式) で力学変数 (位置 \mathbf{r} , 速度 \mathbf{v}) の時間発展を記述する。

$$\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}} + \Delta t \mathbf{a}_i, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \Delta t \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}. \quad (5.8)$$

ここで、 Δt は時間刻み、 \mathbf{a} は加速度である。リープ・フロッグ法は 2 段階の積分スキームであるため、初期値が 2 つ必要である。そのため、補助的に次の式も併用される。

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{a}_i. \quad (5.9)$$

この式は、各ステップでの位置における速度を知りたい時にも用いられる。

5.2.2 シンプレクティック数値積分法としてのリープ・フロッグ法

Hamilton 系の数値積分において、リープ・フロッグ法は力学変数の時間発展が正準変換となる点で有利となる。このような、時間発展が正準変換となっているような積分スキームを、シンプレクティック数値積分法と呼ぶ。リープ・フロッグ法はシンプレクティック数値積分法の最も簡単な例の一つである。リープ・フロッグスキームが正準変換となることをみるために、次の補題を示しておこう。以後、力学変数は一般化座標 q 、一般化運動量 p とおく。

Lem 5.1.

Poisson 括弧が不変に保たれる変数変換は、正準変換となる。すなわち、

$$\{f, g\}_{(q,p)} = \{f, g\}_{(Q,P)}$$

ならば、変換 $(q, p) \mapsto (Q, P)$ は正準変換となる。ここで、 f, g は力学変数の関数である。

Proof.

簡単のために 1 次元の場合について示す。変数をまとめて、 $z_1 = q, z_2 = p, \zeta_1 = Q, \zeta_2 = P$ で、 $z = (q, p), \zeta = (Q, P)$ とおく。Poisson 括弧の定義式より、

$$\{f, g\}_z = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p}, \quad (5.10)$$

$$\{f, g\}_\zeta = \frac{\partial f}{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial g}{\partial Q} \frac{\partial f}{\partial P} \quad (5.11)$$

である。これらの式を、シンプレクティック内積を意識して表現すると、

$$\{f, g\}_z = J_{ij} \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial z_j} = {}^t \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \hat{j} \frac{\partial g}{\partial z}, \quad (5.12)$$

$$\{f, g\}_\zeta = J_{ij} \frac{\partial f}{\partial \zeta_i} \frac{\partial g}{\partial \zeta_j} = {}^t \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) \hat{j} \frac{\partial g}{\partial \zeta}. \quad (5.13)$$

ここで、 \hat{j} は、 $\hat{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ という反対称行列である。 ζ に関する Poisson 括弧を z に対する偏微分で書き直すためにヤコビアンを使えば、

$$\{f, g\}_\zeta = {}^t \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) {}^t \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \hat{j} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial g}{\partial z} \quad (5.14)$$

となる。これを、 $\{f, g\}_z = \{f, g\}_\zeta$ という条件より、 z に対する Poisson 括弧と比較すれば、

$${}^t \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \hat{j} \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \hat{j} \quad (5.15)$$

を得る。これは、 $\partial z / \partial \zeta$ がシンプレクティック行列であることに他ならない。ヤコビアンがシンプレクティック行列となる変換は正準変換となるので、変換 $(q, p) \mapsto (Q, P)$ は正準変換となる。より一般に、 n 次元の系についても、 $\hat{J}_{2n} = \begin{pmatrix} \hat{O}_n & \hat{E}_n \\ -\hat{E}_n & \hat{O}_n \end{pmatrix}$ を用いてシンプレクティック内積の形式に書き換えれば、同様に示すことができる。 Q.E.D.

以上の補題を用いて、リープ・フロッグ法での力学変数の時間発展は正準変換であることが証明できる。そのためには、リープ・フロッグ公式と式 (5.9) を用いて次のように書き換える。

$$q_{i+1} = q_i + \frac{\Delta t}{m} p_i + \frac{\Delta t^2}{2m} F_i, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i + \Delta t F_i + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{F_{i+1} - F_i}{\Delta t} \\ &= p_i + \frac{\Delta t}{2} (F_{i+1} + F_i). \end{aligned} \quad (5.17)$$

ここで、 F は力である。

Thm 5.1.

リープ・フロッグ法の時間発展：

$$q_{i+1} = q_i + \frac{\Delta t}{m} p_i + \frac{\Delta t^2}{2m} F_i, \quad (5.18)$$

$$p_{i+1} = p_i + \frac{\Delta t}{2} (F_{i+1} + F_i). \quad (5.19)$$

は正準変換である。

Proof.

i 番目と $i+1$ 番目での Poisson 不変性を示す。まず、次のような、一般化座標で表される力を考える*3。

$$F = \alpha q^s \quad (s \in \mathbb{Z}). \quad (5.20)$$

ここで、 α は定数である。この力と q の Poisson 括弧は、 $s \geq 0$ のときは明らかに 0 であるため、 s が負のときについて議論する。 $\{q, 1\}$ を計算すれば、

$$\begin{aligned} 0 &= \{q, 1\} \\ &= \{q, q^s \cdot q^{-s}\} \\ &= \{q, q^s\} q^{-s} + q^s \{q, q^{-s}\} \end{aligned} \quad (5.21)$$

であり、 $\{q, q^s\} = 0$ なので $\{q, q^{-s}\} = 0$ となることがわかる。故に、任意の $s \in \mathbb{Z}$ について、 $\{q, F\} = \{q, \alpha q^s\} = 0$ となることがわかる。

$i+1$ 番目における Poisson 括弧式は、

$$\{q_{i+1}, p_{i+1}\} = \left\{ q_{i+1}, p_i + \frac{\Delta t}{2} F_i + \frac{\Delta t}{2} F_{i+1} \right\} \quad (5.22)$$

となる。ここで、 $\{q_{i+1}, F_{i+1}\} = 0$ であるので、括弧式右側の第 3 項は消える。また、括弧式左側を展開すれば、

$$\begin{aligned} \{q_{i+1}, p_{i+1}\} &= \left\{ q_i + \frac{\Delta t}{m} p_i + \frac{\Delta t^2}{2m} F_i, p_i + \frac{\Delta t}{2} F_i \right\} \\ &= \{q_i, p_i\} + \frac{\Delta t}{2} \{q_i, F_i\} + \frac{\Delta t}{m} \{p_i, p_i\} + \frac{\Delta t^2}{2m} (\{p_i, F_i\} + \{F_i, p_i\}) \end{aligned} \quad (5.23)$$

となる。右辺第 2, 3 項目は 0 であり、第 4 項目も () 内が打ち消しあって 0 となる。よって、

$$\{q_{i+1}, p_{i+1}\} = \{q_i, p_i\} \quad (5.24)$$

が導かれ、時間発展の Poisson 不変性が示される。つまり、リープ・フロッグ法での時間発展は離散正準変換となっている。 Q.E.D.

Hamilton 力学では、一般化座標 q とそれに共役な運動量 p の組で運動の状態を表現し、 q, p で張られた相空間という超平面の上の単純曲線として、その時間発展の軌跡は現れる。これをトラジェクトリといい、トラジェクトリの形状は、ハミルトニアン形式 $H(q, p)$ と力学的エネルギーの値 E を決定し、エネルギー保存則 $H(q, p) = E$ を陰関数曲線として表すことで一意に定めることができる。このトラジェクトリを再現することは粒子の軌道を決定することと同義であり、系のシミュレーションにおける第一目標となる。

一方、ある保存系を正準変換した後も、元のハミルトニアンに対応する新たなハミルトニアンが保存し、正準変換前のトラジェクトリに近いトラジェクトリが描かれることになる。このことから、シンプレクティック数値積分は時間発展を重ねても誤差は大きくなり、すなわち、軌道の大域的誤差について非常によい振る舞いを示すことが期待される。

5.3 各積分スキームの実装

5.3.1 積分スキームの併用

本論文で扱う系は、抗力がある Hill 系であり、特に抗力項に対してはリープ・フロッグスキームを使うことができない。これは、抗力項に起因する解の不安定性があり、時間発展に伴って符号が振動しながら誤差が増大することが知られているからである (Mesinger & Arakawa, 1976)。また、指数型の大気や速度の自乗項を考えると、Hill 方程式と組み合わせて時間発展式を書き下す際に超越方程式を解かなければならなくなるので、アルゴリズムを簡略化する意味においても、抗力項にリープ・フロッグスキームを用いるべきではない。よって、2つの積分スキームを併用し、重力項 (Hill 方程式の部分) にはリープ・フロッグスキームを、抗力項には 4 次 Runge-Kutta スキームを用いて時間発展をさせることにする。具体的には、速度の時間発展において、以下のように異なる積分スキームで得られる結果を足し合わせる。

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \Delta t(\mathbf{g}_{i+1/2} + \overrightarrow{\text{RK}}_4(\mathbf{d}_i)) \quad (5.25)$$

ここで、 $\mathbf{g}_{i+1/2}$ は重力項 (Hill 項)、 \mathbf{d}_i は抗力、 $\overrightarrow{\text{RK}}_4$ は 4 次 Runge-Kutta 法での時間発展である。

5.3.2 Hill 系における速度項の取り扱い

Hill 方程式のように、力が速度に依存する項を持つ場合にリープフロッグ・スキームを適用するときは、直接に式 (5.7), (5.8), (5.9) を直接に用いるよりも、これらの式を式 (5.16), (5.17) を参考に下式のように書き換えたほうが便利である。

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \Delta t \mathbf{v}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_i, \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \Delta t \mathbf{a}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i}{\Delta t} \\ &= \mathbf{v}_i + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{a}_{i+1} + \mathbf{a}_i). \end{aligned} \quad (5.27)$$

*1 このような力の例として、調和振動子 $F = -kx$ 、重力 $F = -GMmr^{-2}$ がある。一般化座標によって表示される力の仮定は、ポテンシャル力を考えるならばごく自然な仮定であると言える。

特に, Hill 方程式では, $u = \dot{x}, v = \dot{y}$ の時間発展式で速度に依存する力が出てくる (Coriolis 項) ため注意が必要である. 式 (5.27) を, Hill 系における $u = \dot{x}, v = \dot{y}$ について解き, 速度の時間発展を書けば,

$$u_{i+1} = \frac{1}{2\Delta t^2\omega^3 + 2} \{3\Delta t\omega^2 x_{i+1} + \Delta t^2\omega (g_{i+1}^y + g_i^y + 2\text{RK}_4(d_i^y)) + \Delta t g_{i+1}^x + 3\Delta t\omega^2 x_i + 4\Delta t\omega v_i + (2 - 2\Delta t^2\omega^2) u_i + \Delta t g_i^x + 2\Delta t\text{RK}_4(d_i^x)\}, \quad (5.28)$$

$$v_{i+1} = -\frac{1}{2\Delta t^2\omega^3 + 2} \{3\Delta t^2\omega^4 x_{i+1} + \Delta t (-g_{i+1}^y - g_i^y - 2\text{RK}_4(d_i^y)) + \Delta t^2\omega^2 g_{i+1}^x + 3\Delta t^2\omega^4 x_i + (2\Delta t^2\omega^3 - 2) v_i + (2\Delta t\omega^2 + 2\Delta t\omega) u_i + (\Delta t^2 g_i^x + 2\Delta t^2\text{RK}_4(d_i^x)) \omega^2\} \quad (5.29)$$

を得る. これが $u = \dot{x}, v = \dot{y}$ の時間発展に際して解くべき方程式となる.

5.4 設定条件

数値計算に際して, 設定したものは以下の通りである.

Tab. 5.1 設定した数値.

物理量	数値	参考にした文献
スケールハイト H	12000 km	Hunten (1979)
近火点における大気密度 ρ_p	4.9×10^{-6} g/cm ³	Hunten (1979)
衛星候補天体の半径	10 km	フォボスの値を参考にした
初期位置	Lagrange 点 (L_1 のみ)	Hunten (1979)
初期速度	任意 (下記)	-
時間刻み	0.00001 yr	-
最大積分時間	8 yr	-

ここで, Lagrange 点 (L_1, L_2) からの進入と初期速度の方向について考察してみる. Lagrange 点からの進入を仮定した根拠は, Lagrange 点が 3 体問題におけるポテンシャルの鞍点だからである. ここから外れた点からの進入は, 太陽の重力と火星の重力が相殺せず, 大きな初速度を与えなければ火星の重力圏に到達できなかったり, もし仮に火星重力圏内へ到達できたとしても, ポテンシャル障壁を乗り越えた後の粒子は大きく加速され, 結果的に火星との相対速度の上昇を招いてしまう. これは, 捕獲にとっては不都合であると言える. また, Lagrange 点からの進入という条件は初期速度の方向に制約を与える. この制約は, Lagrange 点が鞍点であることから来るもので, L_1, L_2 は Hill 座標の意味で x 方向には不安定であるという事実がある. 故に, 初期 x 方向速度は少なくとも火星側を向かなければ, 粒子は火星重力圏内に到達することができない. 特に, 今回の初期位置は L_1 点のみを考えているので, 初期速度は必ず正となる.

次に, 火星との相対速度について議論する. 火星の離心率は概ね 0.1 であり, その軌道速度は, 近日点速度, 遠日点速度が

$$v_p = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_M}(1+e)}, \quad (5.30)$$

$$v_a = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_M}(1-e)} \quad (5.31)$$

で与えられるので, 軌道が真円であることを仮定したときの速度の 0.95-1.05 倍で変化する. つまり, 離心率 0 の天体との遭遇でも, 火星の位置によっては, 公転速度の 5% 程度の相対速度を持つてしまうというこ

とになる。一方、火星は軌道長半径 1.52 AU のところを 1.88 yr で公転しているため、その公転速度はおおむね 3 AU/yr となる。よって、数 AU/yr の数%程度であるという根拠から、数値計算で与える相対速度は 0.01 AU/yr のオーダーで振ることとする。具体的には、 u は $0.01 \text{ AU/yr} \leq u \leq 0.10 \text{ AU/yr}$ の範囲において 0.01 刻みで、 v は $-0.10 \text{ AU/yr} \leq v \leq 0.10 \text{ AU/yr}$ の範囲において 0.01 AU/yr 刻みでそれぞれ与え、初期速度とした。

また、3 体での数値計算のほかに、太陽の効果を取り除いた 2 体での計算も行った。これは、Hunten (1979) での解析解の妥当性を示すためである。設定条件は上に示したものと同一であるが、 x 軸上の点からの進入 (3 体系では Lagrange 点からの進入に相当) を仮定した場合、2 体計算では x 軸対称となるため、先の初期速度条件のうち、 $v > 0$ の場合についてのみ計算することにした。なお、 $v = 0$ の場合は火星の方向に初期速度が向いており、落下することが自明であるため、計算は行っていない。

6 結果

6.1 2体計算

得られた計算結果のうち、大気の抗力の影響で有意な軌道エネルギー散逸が確認されたものは、 $(u, v) = (0.01, 0.01), (0.02, 0.01), (0.03, 0.01), (0.04, 0.01), (0.05, 0.01)$ の5例であった。その軌道例を以下の図に示す。なお、この図の中央のオレンジ色の小円は火星半径、水色の大円は Hill 半径円を表す。

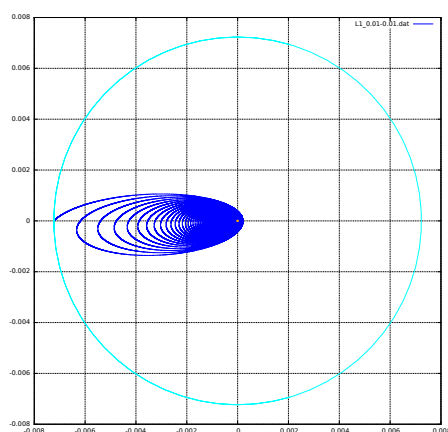


Fig. 6.1 $(u, v) = (0.01, 0.01)$ の場合の軌道.

また、真円化時間の指標として、 $e < 0.1$ となるまでの時間を調べた結果、以下のグラフの通りとなった。

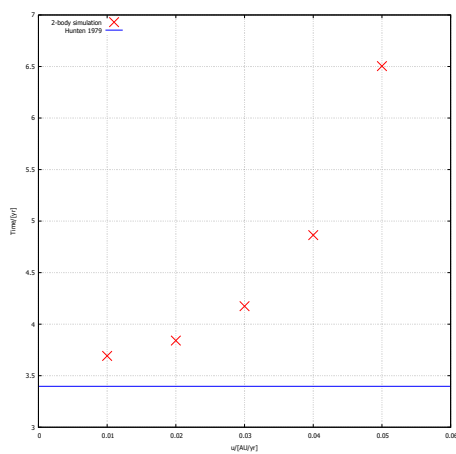


Fig. 6.2 Hunten (1979) との真円化時間の比較.

6.2 3体計算

得られた計算結果のうち、大気の抗力の影響で軌道拘束が成され、捕獲されたのは、以下の16個の例である。この図の中央のオレンジ色の小円は火星半径、水色の大円はHill半径円を表す。

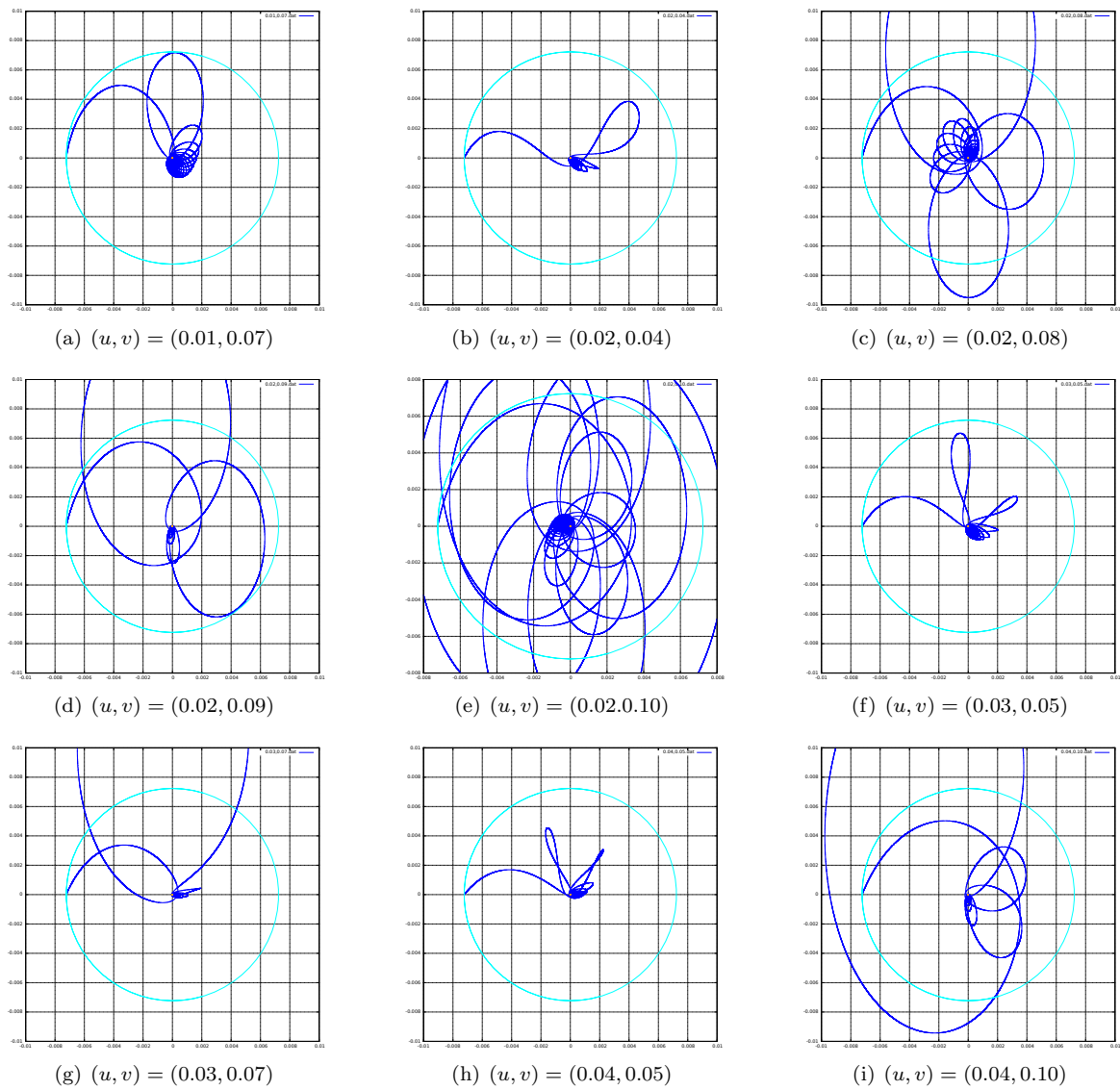
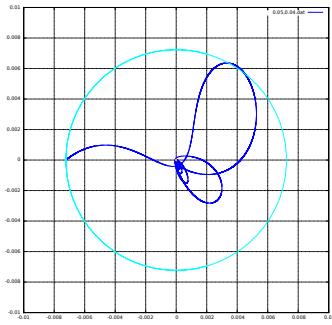
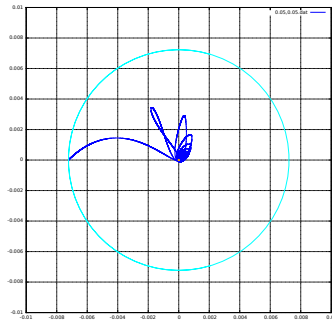


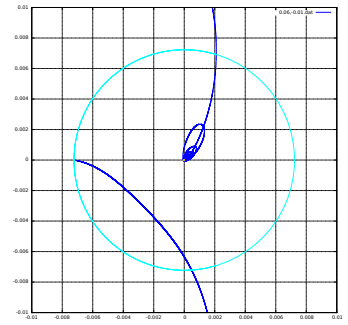
Fig. 6.3 捕獲の例 (1).



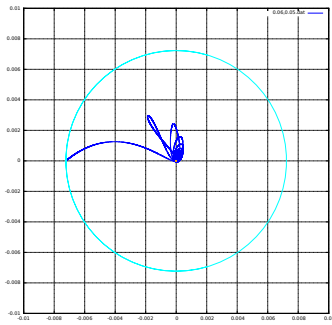
(a) $(u, v) = (0.05, 0.04)$



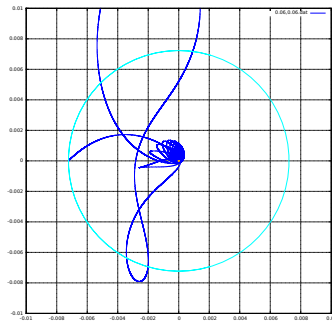
(b) $(u, v) = (0.05, 0.05)$



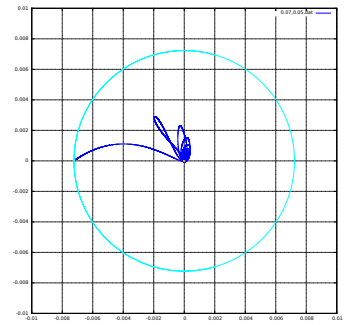
(c) $(u, v) = (0.06, -0.01)$



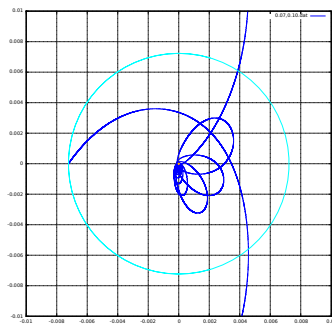
(d) $(u, v) = (0.06, 0.05)$



(e) $(u, v) = (0.06, 0.06)$



(f) $(u, v) = (0.07, 0.05)$



(g) $(u, v) = (0.07, 0.10)$

Fig. 6.4 捕獲の例 (2).

また、捕獲が起こった際の拡大図の例を以下に示す。

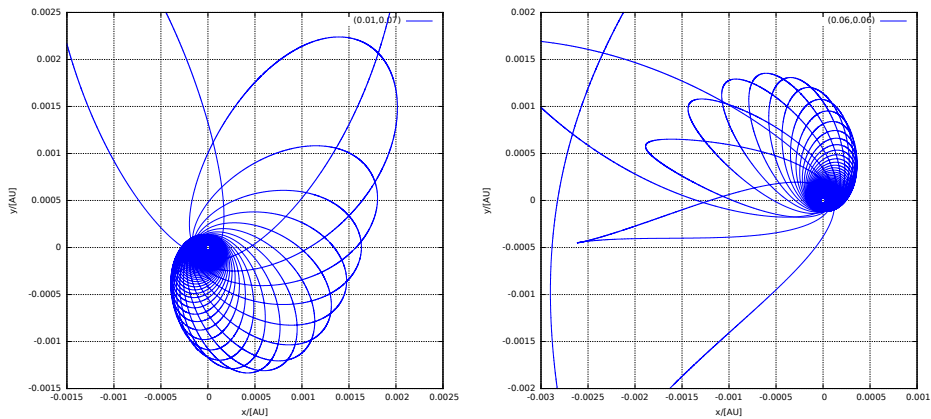


Fig. 6.5 捕獲の例 (拡大図).

なお、これらの例以外にも、大気抗力からの拘束を受ける前に落下してしまったものが18例、8年の積分時間では判断がつかないものは1例あった。その他の175例は最終的にエピサイクル運動を示しており、火星に全く束縛されていないと判断した。エピサイクル運動は太陽周りの楕円軌道を回転座標系から見たときに現れる特徴的な運動であり、Hill中心天体の重力の影響をほとんど受けていない運動をしているとみなすことができる。つまり、エピサイクル軌道への移行は捕獲が行われなかったことの判断材料となる。Fig. 6.6は、エピサイクル運動への移行したものの例である。この例では、Lagrange点から火星フライバイをしたのちに火星重力圏の外へ弾き飛ばされ、エピサイクル運動へ移行していることが見てとれる。

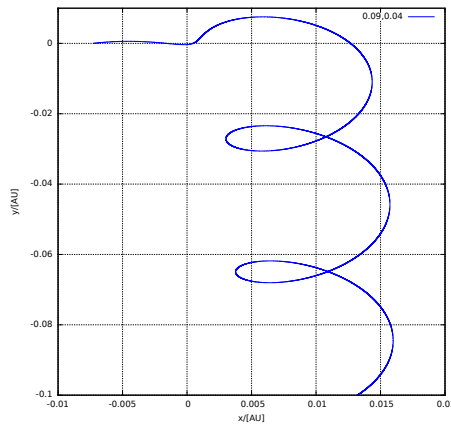


Fig. 6.6 Hill系におけるエピサイクル運動への移行

捕獲・落下・不明（未判断）のケースを初期速度空間に焼きなおし、まとめたのが次の表である。この表からは、高 v (≥ 0.04) かつ低 u (≤ 0.06) のケースで捕獲や落下が多いことが読み取れる。

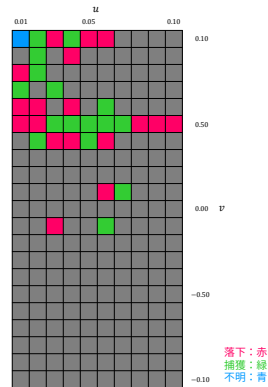


Fig. 6.7 初期速度空間上の捕獲・落下・不明（未判断）のケースの分布.

ここで、捕獲が起こった際の離心率変化についての結果をまとめる。まず、離心率変化の一例を以下に示す。

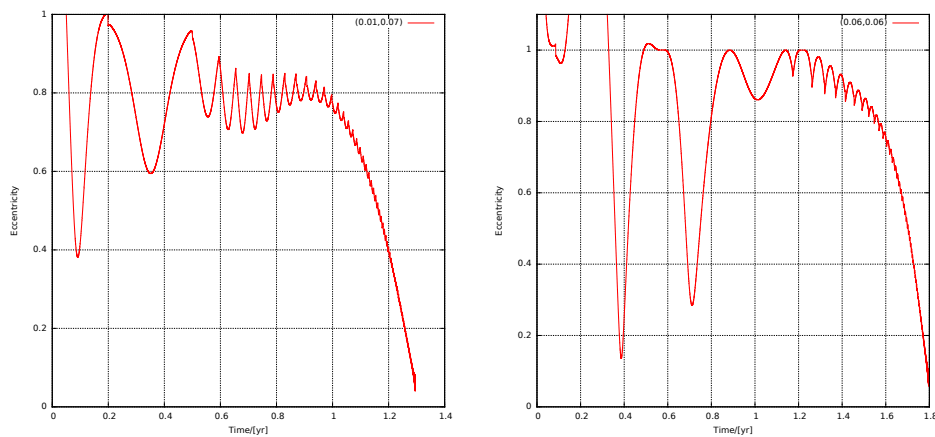


Fig. 6.8 離心率の時間変化の一例.

軌道捕獲が成されたすべての例で、グラフに示したような、軌道周回の周期で小刻みな振動を繰り返しながら離心率が急激に減少するという特徴が認められた。次の表 (Tab. 6.1) は、それぞれの初期速度条件に対する軌道進化のスケールをまとめたものである。ここで、離心率変化のタイムスケールには、Hunten (1979) で述べられているような「真円化時間」を用いていないことに注意されたい。本研究で得られた結果では、離心率が0になる前に火星に落下してしまうものが多かったため、「真円化時間」ではなく、

$$\tau_n = (\text{離心率が } 1/e^n \text{ となる最終時刻}) - (\text{離心率が } 0.99 \text{ となる最終時刻}) \quad (6.1)$$

なる、離心率が $1/e^n$ になるまでの時間 τ_n の、 $n = 0.5, 1, 2$ を結果として載せることにした*4。これを、離心率減衰時間と呼ぶことにする。ここで、離心率減衰時間の定義の基準となる $1/e^n$ の e は、離心率ではなく Napier 数を表している。

*4 この定義式で、「時刻」ではなく「最終時刻」としているのは、軌道周回によって小刻みに振動しながら離心率が低下していくからである。つまり、場合によっては、離心率の値に対して時刻が多価関数になってしまうのである。

Tab. 6.1 捕獲された例の離心率最終値 e_{end} , 離心率減衰時間 $\tau_{0.5}, \tau_1, \tau_2$, 軌道寿命 T_L .

$u/[\text{AU}/\text{yr}]$	$v/[\text{AU}/\text{yr}]$	e_{end}	$\tau_{0.5}/[\text{yr}]$	$\tau_1/[\text{yr}]$	$\tau_2/[\text{yr}]$	$T_L/[\text{yr}]$
0.01	0.07	0.042315	0.91619	1.01058	1.07696	1.29499
0.02	0.04	0.245309	0.17335	0.19719	—	0.67719
0.02	0.08	0.052736	1.43009	1.52696	1.59928	2.34878
0.02	0.09	0.425578	0.16801	—	—	1.39045
0.02	0.10	0.046476	1.23252	1.33405	1.39873	5.15737
0.03	0.05	0.120342	0.27278	0.31395	0.34424	0.94736
0.03	0.07	0.531977	0.09096	—	—	0.91199
0.04	0.05	0.174596	0.20003	0.23310	—	0.69442
0.04	0.10	0.472986	0.56619	—	—	1.50139
0.05	0.04	0.771443	—	—	—	0.70274
0.05	0.05	0.125577	0.22567	0.26730	0.29599	0.60258
0.06	-0.01	0.346886	0.16898	0.18743	—	1.19825
0.06	0.05	0.159305	0.24914	0.28166	—	0.49913
0.06	0.06	0.057577	0.42942	0.49455	0.54366	1.79621
0.07	0.05	0.181852	0.23278	0.26130	—	0.46623
0.07	0.10	0.240009	0.60543	0.63000	—	1.64937

これらの結果から、捕獲後の離心率変化のタイムスケールは 1 mth から 1 yr 程度のオーダーであることが読み取れる。また、軌道の真円化は殆どの場合で不十分であることも分かる。

次に、軌道エネルギーの時間変化についてまとめる。このグラフからは、軌道寿命の終盤で急激に軌道エネルギーが散逸することが読み取れる。この特徴は、他のすべての捕獲例でも見られる特徴である。

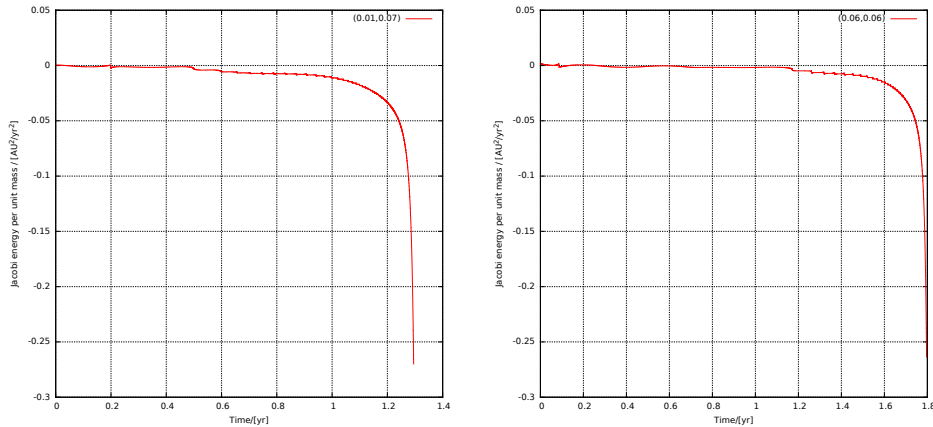


Fig. 6.9 軌道エネルギーの時間変化.

また、軌道進化に際しての力学的エネルギーの散逸量を、下の表にまとめる。ここでのフォボスの面積加熱率は、フォボス質量を 1.0×10^{16} kg, フォボスを半径 10 km の球と仮定して求めた値である。この加熱については議論の節で述べることにする。

Tab. 6.2 捕獲された例の単位質量あたりのエネルギー散逸 $\Delta\epsilon$, フォボスでの面積加熱率 h (最大値).

u /[AU/yr]	v /[AU/yr]	$\Delta\epsilon$ /[AU ² /yr ²]	$\Delta\epsilon$ /[10 ⁶ J/kg]	h /[10 ¹³ J/m ²]
0.01	0.07	0.270330	6.08320	4.84085
0.02	0.04	0.210292	4.73217	3.76574
0.02	0.08	0.267550	6.02064	4.79107
0.02	0.09	0.165685	3.72839	2.96695
0.02	0.10	0.272824	6.13932	4.88551
0.03	0.05	0.246878	5.55546	4.42089
0.03	0.07	0.132988	2.99261	2.38144
0.04	0.05	0.230828	5.19429	4.13348
0.04	0.10	0.152599	3.43391	2.73262
0.05	0.04	0.064940	1.46134	1.16289
0.05	0.05	0.244468	5.50123	4.37774
0.06	-0.01	0.184101	4.14280	3.29673
0.06	0.05	0.236494	5.32179	4.23495
0.06	0.06	0.265223	5.96827	4.74940
0.07	0.05	0.231530	5.21009	4.14605
0.07	0.10	0.218440	4.91552	3.91165

7 議論と展望

7.1 軌道進化のタイムスケール

2体軌道計算の結果は、Hunten (1979) での真円化時間の推算よりも長い時間で真円化が行われることを示している。しかし、Hunten の議論では、ほぼ自由落下に近い場合を想定している。それを踏まえれば、Hunten と比較すべき結果は、今回の計算の中で最も低速な条件： $(u, v) = (0.01, 0.01)$ であることが言え、その真円化時間は $3.692 \text{ yr} = 1348 \text{ d}$ となる。この結果は、Hunten の $T_e = 1240 \text{ d}$ という結果とおおむね一致しており、Hunten の計算の妥当性を示すことができた。

3体軌道計算の結果から得られる離心率低下にかかる時間は、1 mth-1 yr 程度のオーダーであることが分かった。この値は、Hunten の一つの概算で得られた、 $T_e = 1240 \text{ d}$ という結果と比較して著しく短い結果である。この違いは、Hunten の議論は3体の効果、つまり太陽摂動を取り入れていないという点から来るものであることが予想される。一般に、太陽摂動は天体を火星から遠ざける方向に力を及ぼす。そのため、太陽摂動が火星に捕獲されるために必要な初期近火点距離を小さくする方向に働いたのだと解釈できる。なぜならば、初期近火点距離の低下は、より濃密な大気による効力を受けることを意味し、軌道進化のタイムスケールを短くすると考えられるからである。実際、2体計算での捕獲条件は速度（特に v ）の小ささが効いているが、3体計算での捕獲条件は、火星にどれだけ接近したかが効いてきている。このことの詳細な議論をするためには、3体問題での運動方程式の太陽重力を火星近傍で0次近似するような計算で太陽潮汐力の効果を見るのが有用となるかもしれない。

また、抗力による軌道進化での最終的な離心率は、0.1未満となったのは3例のみで、少なくとも真円とは呼べない程度に離心率が大きいままである場合が多いということも特筆すべき点である。このことは、ガスの散逸が起こった後にも継続的な離心率低下が起こらなければ現在のフォボスやダイモスのような真円に近い軌道を再現することができないということを意味している。これについては、捕獲後の数十億年にわたる潮汐軌道進化で説明ができる可能性がある。なぜならば、抗力捕獲後の天体の離心率は殆どが0.5未満であり、潮汐散逸説で想定されているようなエネルギー散逸よりも著しく小さい散逸量で真円化を達成することが期待できるからである。また、今回の大気とは異なるシナリオの大気では、真円化を簡単に達成できるかもしれない。例えば、Kepler 回転する大気では、天体は大気との速度差が低いまま火星を周回することができ、軌道寿命が延びると考えられる。軌道寿命が延びることは、軌道進化を進めるうえで有利であり、長い軌道寿命の中で十分に離心率を低下させ、真円化を達成できる可能性がある。

また、本研究では、軌道傾斜角の進化について議論をすることができなかった。軌道傾斜角が小さいことは、火星衛星の捕獲起源論の困難として挙げられてきた。実際、本研究で想定しているような球対称静止大気では軌道傾斜角を低下させることができないが、大気が赤道に沿って自転している場合は、軌道傾斜角の低下が期待できる。特に、Kepler 回転している円盤型の大気では、天体がいったん捕獲されると、先に述べたように、軌道の寿命を延ばすことが可能となる。このような長い寿命の中では、軌道傾斜角を有意に低下させることができるかもしれない。

7.2 軌道エネルギーの散逸

エネルギー変化のグラフからは、軌道エネルギーの有意な減衰、散逸が読み取れる。これは、大気の抗力がした仕事である。これによって散逸したエネルギーの幾らかは惑星の大気の加熱や衝撃波へ費やされるが、残

りのエネルギーは主に捕獲された天体の加熱に使われる*5。これは、地球上での、流星における流星体の蒸発や探査機の大気圏再突入でも見られる例である。

本研究では、すべてのエネルギーが天体の加熱に使われたときの天体の加熱率が 10^{13} J/m^2 程度となることを明らかにした。これは、Hunten (1979) による $7.5 \times 10^{12} \text{ J/m}^2$ という概算と調和的である。数値計算で得られた結果はどれも Hunten の概算よりも大きな値を示しているが、これは、Hunten の概算が Lagrange 点で静止している天体の自由落下を考えており、かなり控えめな推算であるためだと予想される。ここで、Hunten で紹介されている、Öpik (1958) の $8.1 \times 10^6 \text{ J/kg}$ という蒸発熱を仮定すれば、 $1.5 \sim 5.9 \times 10^6 \text{ kg}$ の蒸発が見積もられる。これは、もとの天体が 10 km の直径を持っていたとすれば、 $0.8 \text{ km} \sim 3 \text{ km}$ 程度の半径の縮小に相当すると計算できる。この半径縮小の見積もりは、物質の散逸が蒸発ではなく熔融でなされるならば、より大きな値となり、衝撃波や大気の加熱にエネルギーが費やされるならば、より小さな値となる。

先に述べたような大量の物質散逸は、蒸発ガスの凝縮物や天体からのメルト放出物を伴うことが予想される。つまり、天体物質が強い加熱を受けてその表面を離れ、火星周回軌道へ移行するシナリオを考えることができ、そのうちの幾らかは火星を周回する間に捕獲されたもとの小天体に降着する可能性がある。このような粒子は、2022 年度に打ち上げが予定されている、日本の火星衛星サンプルリターン計画 “Mars Moon eXploration (MMX)” のその場観測（土壌の高解像度撮影など）ないしリターンサンプルの分析における指標となるかもしれない。また、このような議論は、今後行われるであろう木星や土星の捕獲衛星探査でも使えると期待される。つまり、探査対象の衛星の起源の診断学として、この加熱放出物の有無の調査が使える可能性がある。

そのためにも、どのくらいの加熱放出物が伴うのか、加熱放出物の軌道計算によってどの程度の量が捕獲衛星に降着できるかを議論する必要がある、今後の展望としたいと考えている。

*5 もちろん、捕獲された天体の構造的に弱い部分を破壊したりするエネルギーに費やされることも考えられるが、破壊が行われるための構造物の形状やサイズスケールの制約から、加熱と比較すれば無視できると考えられる。

8 まとめ

- Huntten (1979) で想定されているような条件の下, Lagrange 点 L_1 を初期位置とする円制限 3 体問題の数値計算を行うことによって, 実際に天体捕獲がされる状況がいくつか存在し, それが高 v , 低 u のケースに多いということを明らかにした.
- 本研究では, 軌道進化のタイムスケール, 特に離心率低下のタイムスケールを計算した. これによって離心率低下のタイムスケールが 1 mth-1 yr 程度のオーダーであると見積もられた. この結果より, 捕獲された天体が衛星となるためには, 大気散逸が 1 mth-1 yr 程度のタイムスケールで起こる必要があると言える.
- 得られた計算結果から, 静止指数型大気内での軌道進化では, 真円に近い軌道を達成するのは容易ではないことが明らかとなった. さらなる離心率の低下は, 抗力による捕獲ののちのプロセス, 例えば潮汐軌道進化などで説明ができるかもしれない. また, Kepler 回転する大気では, 真円化に足る軌道寿命を実現することができるかもしれない.
- 捕獲に際してのエネルギー散逸は, 天体を著しく加熱させ, 有意な物質散逸を引き起こすほどのものであることを, 数値計算で明らかにした. この加熱で放出される物質の中には, 蒸発ガスの凝縮物やメルト凝固物があることが期待でき, その中の一部は再びもとの天体に落ちるものがあるかもしれない. こういった粒子は, 探査の一つの指標となるだろう.

謝辞

本卒業論文を書くにあたって、たくさんの方々にお世話になりました。倉本 圭教授と鎌田 俊一特任助教には、丁寧なご指導とアドバイスを頂き、厚くお礼を申し上げます。また、日常の議論を通じて、多くの学問と知識を頂いた惑星宇宙グループの教員の方々、先輩方に感謝の意を表します。

付録 A Lagrange の惑星方程式

この節では, King-Hele (1964) を基に, Lagrange の惑星方程式の導出を行う. Lagrange の惑星方程式は, 2 体問題で摂動が加わったときの, 各種軌道要素の時間発展を記述する方程式群であり, 本論文で用いている幾つかの式を導出するための土台となっている.

A.1 a に関する Lagrange の惑星方程式

A.1.1 導出

質量 M の天体の重力を受けて, 軌道長半径 a の楕円軌道を周回する粒子を考える. この粒子が中心天体から位置 \mathbf{r} にあるとき, 単位質量あたりの運動エネルギーは,

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mu \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{1}{2a} \right) \quad (\text{A.1})$$

と書ける. ここで, $\mu = GM$ である. これを時間微分すれば,

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mu \left(-\frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r^3} + \frac{\dot{a}}{2a^2} \right) \iff \dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \dot{\mathbf{r}} \cdot \left(\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (\text{A.2})$$

が従う. 一方, 単位質量あたりの力 \mathbf{f} による摂動がある場合の粒子の運動方程式は,

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{f} \quad (\text{A.3})$$

と書き表され, この表式を式 (A.2) に代入すれば, a に関する Lagrange の惑星方程式:

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f} \quad (\text{A.4})$$

を得る.

A.1.2 実装

この式を使いやすくするために, $\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}$ を成分に展開した表式も考える. $\dot{\mathbf{r}}$ を, Fig. A.1 のように動径方向 $\hat{\mathbf{r}}$, 角度方向 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, 軌道面法線方向 $\hat{\mathbf{n}}$ というふうに分解しよう. ここで, θ を近点離角とすれば,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.5})$$

と成分分解できる.

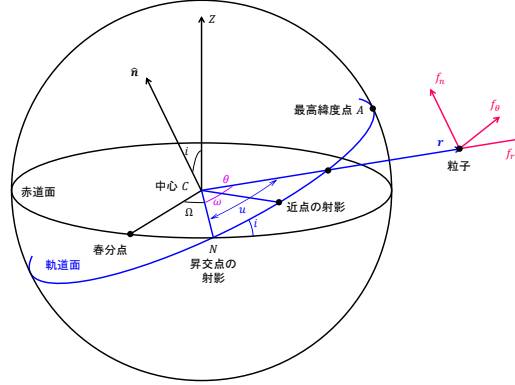


Fig. A.1 粒子にかかる力 \mathbf{f} の各成分 (King-Hele 1964 を基に作成).

ところで, θ と距離 r で表示した粒子の軌道は,

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \theta} \quad (\text{A.6})$$

と表される. ここで, $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ は単位質量あたりの角運動量である. 特に, $\theta = \pi/2$ のとき, 距離 r は半直弦 (semi-latus rectum) $p = a(1 - e^2)$ を表し,

$$p = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu}, \quad (\text{A.7})$$

またはそこから,

$$h = \sqrt{\mu p} \quad (\text{A.8})$$

が従う. これらを用いれば,

$$\begin{aligned} r\dot{\theta} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \theta), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

または,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{pe\dot{\theta} \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \\ &= \frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

を得る. よって, a に関する Lagrange の惑星方程式は,

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} \{f_r e \sin \theta + f_\theta (1 + e \cos \theta)\} \quad (\text{A.11})$$

と書き換えることができる.

A.2 e に関する Lagrange の惑星方程式

A.2.1 導出

式 (A.8) より, $\mathbf{h} = \sqrt{\mu p} \hat{\mathbf{n}}$ であり, また, これは単位質量あたりの角運動量であるため,

$$\sqrt{\mu p} \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{A.12})$$

が成立する. この式の辺々を微分すれば,

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \dot{p} \hat{\mathbf{n}} + \sqrt{\mu p} \dot{\hat{\mathbf{n}}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \quad (\text{A.13})$$

となり, 加速度項を式 (A.3) を用いて, 摂動力で表して整理すれば,

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} + \frac{\dot{p}}{2p} \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \mathbf{r} \times \mathbf{f} \quad (\text{A.14})$$

を得る.

ここで, $\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt}$ について考える. $\hat{\mathbf{n}}$ の長さは不変 ($|\hat{\mathbf{n}}| = 1$) であるため, $\hat{\mathbf{n}}$ は向きのみが変化する. よって, $\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt}$ の具体的な表式を得るためには, $\hat{\mathbf{n}}$ の角速度 \mathbf{B} を考えるだけでよい. すなわち,

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} = \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.15})$$

となる. また, $\hat{\mathbf{n}}$ は Ω, i の値によって一意的に決めることができ, 同様に, $\hat{\mathbf{n}}$ の変化 $\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt}$ も Ω, i の変化で記述されることが期待できる. ここで, Fig A.1を見れば,

$$\mathbf{B} = \dot{\Omega} \overrightarrow{CZ} + \frac{di}{dt} \overrightarrow{CN} \quad (\text{A.16})$$

という成分に展開することができるのがわかるが, これらの成分に $\hat{\mathbf{n}}$ を外積の意味で乗した場合にどのような形となるか見てみよう. $\overrightarrow{CZ} \perp \overrightarrow{CN}$ かつ \overrightarrow{CZ} と $\hat{\mathbf{n}}$ がなす角が i になることに注意すれば,

$$\dot{\Omega} \overrightarrow{CZ} \times \hat{\mathbf{n}} = \dot{\Omega} \sin i \overrightarrow{CN} \quad (\text{A.17})$$

とでき, かつ, $\overrightarrow{CN} \perp \overrightarrow{CA}$ より,

$$\frac{di}{dt} \overrightarrow{CN} \times \hat{\mathbf{n}} = -\frac{di}{dt} \overrightarrow{CA} \quad (\text{A.18})$$

となる. ここで, A は最高緯度点である. まとめると,

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} = \dot{\Omega} \sin i \overrightarrow{CN} - \frac{di}{dt} \overrightarrow{CA} \quad (\text{A.19})$$

が得られる.

再び, 式 (A.14) に注目しよう. 右辺の $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ を各成分に展開すれば,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{f} = r f_n \sin u \overrightarrow{CN} - r f_n \cos u \overrightarrow{CA} + r f_\theta \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.20})$$

となり, これと式 (A.19) を用いれば,

$$\dot{\Omega} \sin i \overrightarrow{CN} - \frac{di}{dt} \overrightarrow{CA} + \frac{\dot{p}}{2p} \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left(r f_n \sin u \overrightarrow{CN} - r f_n \cos u \overrightarrow{CA} + r f_\theta \hat{\mathbf{n}} \right) \quad (\text{A.21})$$

が従う。この式の成分比較より、

$$\dot{\Omega} \sin i = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} r f_n \sin u, \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} r f_n \cos u, \quad (\text{A.23})$$

$$\dot{p} = 2r f_\theta \sqrt{\frac{p}{\mu}}. \quad (\text{A.24})$$

を導くことができる。

さて、式 (A.7) を微分すれば、

$$\dot{p} = \dot{a}(1 - e^2) - 2ae\dot{e} \iff \dot{e} = \frac{1}{2ae} \{ \dot{a}(1 - e^2) - \dot{p} \} \quad (\text{A.25})$$

が得られ、 \dot{e} を \dot{a}, \dot{p} から導くことができる。よって、

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \frac{1}{2ae} \left[\frac{2a^2(1 - e^2)}{\sqrt{\mu p}} \{ f_r e \sin \theta + f_\theta (1 + e \cos \theta) \} - 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} r f_\theta \right] \\ &= \frac{1}{ae} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \{ f_r a e \sin \theta + f_\theta a (1 + e \cos \theta) - r f_\theta \}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

これが e に関する Lagrange の惑星方程式である。

A.2.2 標構の変更

今までは、動径方向、角度方向、軌道面法線方向を定め、その成分で Lagrange の惑星方程式を展開した。これらの3方向は、「運動の球面への射影」を用いて定義されるものであるが、摩擦力のような速度方向の摂動力を考える場合、射影ではなく実際の軌道に対応する標構を定めたほうが議論がしやすい。このような標構を用いた成分表示について議論する。

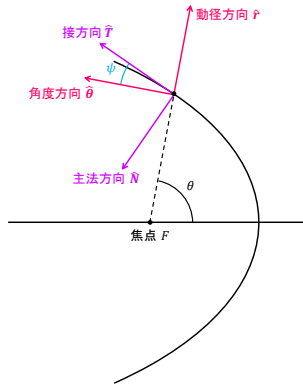


Fig. A.2 接方向と主法方向.

Fig A.2のように、粒子の速度ベクトルの方向と法線加速度の方向に標構を置く。このとき、速度ベクトルの方向を接方向 \hat{T} 、法線加速度の方向を主法方向 \hat{N} と呼ぶことにする*6。 \hat{T} と $\hat{\theta}$ の成す角が ψ であるとき、

*6 このようなベクトル組 $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{n}\}$ は右手系を成し、Frenet-Serret 標構と呼ばれる。

それらの正弦・余弦は以下のように与えられる.

$$\sin \psi = \frac{\dot{r}}{v} = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \theta, \quad (\text{A.27})$$

$$\cos \psi = \frac{r\dot{\theta}}{v} = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \theta). \quad (\text{A.28})$$

これらを用いて f_r, f_θ を f_T, f_N で表すと,

$$\begin{aligned} f_r &= f_T \sin \psi - f_N \cos \psi \\ &= \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \{e f_T \sin \theta - f_N (1 + e \cos \theta)\}, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} f_\theta &= f_T \cos \psi + f_N \sin \psi \\ &= \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \{f_T (1 + e \cos \theta) + e f_N \sin \theta\} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

となる. よって, 接方向・主法方向を用いた標構を採用する場合は, f_r, f_θ を上二つの式を使って書き直せばよい. 例えば, e に関する Lagrange の惑星方程式は,

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \frac{1}{ae} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \{f_r a e \sin \theta + f_\theta a (1 + e \cos \theta) - r f_\theta\} \\ &= \frac{1}{v} \left\{ 2f_T (e + \cos \theta) - \frac{r}{a} f_N \sin \theta \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

と書き直すことができる. ここで, r の表式である式 (A.6) を用いた.

付録 B 離心率変化の見積もり

この節では、式 (A.31) を出発点に、式 (4.8) の導出を行う。離心率変化に寄与する摂動力は（単位質量あたりの）抗力なので、

$$f_T = \frac{D}{m} = -\frac{1}{2m} \rho S C_D v^2 \quad (\text{B.1})$$

である。よって、この f_T を式 (A.31) に代入する。ここで、 ρ は、

$$\rho = \rho_p \exp\left(-\frac{r - r_p}{H}\right) \quad (\text{B.2})$$

という指数型の大気密度である。また、近火点付近 ($\theta \approx 0$) 以外の領域での抗力による軌道減衰の寄与が殆どないと仮定すれば、離心率変化の寄与も $\theta \approx 0$ 以外の領域は無視できて、式 (A.31) は、

$$\dot{e} = \frac{1}{v} \left\{ -\frac{\rho S C_D v^2 (1+e)}{m} \right\} = -\frac{\rho S C_D v (1+e)}{m} \quad \text{as } \theta \rightarrow 0 \quad (\text{B.3})$$

となる。これを時間積分すれば、離心率変化 $1 - e$ を求めることができる。 ρ が火星からの距離によって変化することに注意すれば、

$$1 - e = \frac{S C_D (1+e)}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \rho v dt \quad (\text{B.4})$$

となり、 $\int \rho v dt$ が求めるべき積分だということがわかる。

時間積分をするにあたって、右辺に v が含まれているため、積分をするための粒子の軌道を設定しなければならない。ここでは、近火点付近以外の領域では抗力の寄与が小さいという仮定をしているため、Fig. B.1 のような直線の軌道を考える。

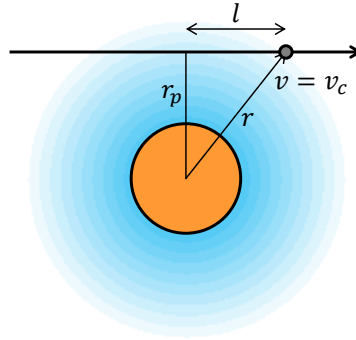


Fig. B.1 軌道と変数の設定.

このような仮定の下で積分を評価すると、

$$\int \rho v dt = 2 \int_0^{\infty} \rho_p \exp\left(-\frac{r - r_p}{H}\right) v dt. \quad (\text{B.5})$$

ここで、Fig. B.1 のように軌道弧長パラメータ l を設定する。このとき、 $v dt = dl$ となり、また、 $l^2 + r_p^2 = r^2$ より、

$$dl = -\frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r_p^2}} \quad (\text{B.6})$$

が成立する。この変数変換を用いて、 r による積分とすれば、

$$\begin{aligned}\int \rho v dt &= 2\rho_p \int_{r_p}^{\infty} \exp\left(-\frac{r-r_p}{H}\right) \frac{-r}{\sqrt{r^2-r_p^2}} dr \\ &= 2\rho_p \int_{r_p}^{\infty} \exp\left(-\frac{r-r_p}{H}\right) \left(\sqrt{r^2-r_p^2}\right)' dr \\ &= 2\rho_p \left\{ \left[\exp\left(-\frac{r-r_p}{H}\right) \sqrt{r^2-r_p^2} \right]_{r_p}^{\infty} + \int_{r_p}^{\infty} \frac{1}{H} \exp\left(-\frac{r-r_p}{H}\right) \sqrt{r^2-r_p^2} dr \right\}.\end{aligned}$$

ここで、第1項目は0となるので、

$$\int \rho v dt = \frac{2\rho_p}{H} \int_{r_p}^{\infty} \exp\left(-\frac{r-r_p}{H}\right) \sqrt{r^2-r_p^2} dr \quad (\text{B.7})$$

となる。いま、抗力の寄与は近火点付近 $r \sim r_p$ にしかないとしているので、

$$\sqrt{r^2-r_p^2} = \sqrt{(r+r_p)(r-r_p)} \sim \sqrt{2r_p(r-r_p)} \quad (\text{B.8})$$

という近似をすれば、

$$\int \rho v dt \sim \frac{\rho_p}{H} \sqrt{2r_p} \int_{r_p}^{\infty} \exp\left(-\frac{r-r_p}{H}\right) \sqrt{r-r_p} dr \quad (\text{B.9})$$

とできる。ここで、 $\xi = \sqrt{r-r_p}$ という変数変換を行えば、

$$dr = 2\sqrt{r-r_p} d\xi = 2\xi d\xi \quad (\text{B.10})$$

となるので、

$$\int \rho v dt \sim \frac{2\rho_p}{H} \sqrt{2r_p} \int_0^{\infty} \xi^2 \exp\left(-\frac{\xi^2}{H}\right) d\xi \quad (\text{B.11})$$

と変形できる。被積分部に注目すれば、

$$\xi^2 \exp\left(-\frac{\xi^2}{H}\right) = -\frac{H}{2} \left\{ \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{H}\right) \right\}' + \frac{H}{2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{H}\right) \quad (\text{B.12})$$

とすることができ、第1項目の積分は0となるので、

$$\begin{aligned}\int \rho v dt &\sim \frac{2\rho_p}{H} \sqrt{2r_p} \int_0^{\infty} \frac{H}{2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{H}\right) d\xi \\ &= \rho_p \sqrt{2r_p} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{H}\right) d\xi \\ &= \rho_p \sqrt{2\pi r_p H}\end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

が従う。よって、離心率変化は、

$$\begin{aligned}1-e &\sim \frac{\rho_p S C_D (1+e) \sqrt{2\pi r_p H}}{m} \\ &= \frac{2}{v_c T_d} \sqrt{2\pi r_p H} (1+e)\end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

と見積もられ、これが求めるべき式となる。ここで、 T_d は抗力時間である。

付録 C 真円化時間の見積もり

C.1 離心近点角

まずはじめに、離心近点角 E に関する幾つかの式を導く。この E は、のちに周回ごとの軌道進化を見積もるために便利な量となる。周回ごとの軌道進化を見積もるためには、Lagrange の惑星方程式の積分を 1 周期分しなければならないが、軌道進化の最中では、絶えず公転周期 T が変化してしまうため、時間積分よりも E による積分の方が有利となる。なお、この小節における議論では、摂動は考慮していない。

Fig. C.1 より、 E, r, θ の間に、

$$r \cos \theta = a(\cos E - e), \quad (\text{C.1})$$

$$r \sin \theta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (\text{C.2})$$

が成立することがわかる。また、これらの自乗和を取ることによって、

$$r = a(1 - e \cos E) \iff \frac{r}{a} = 1 - e \cos E, \quad (\text{C.3})$$

$$\dot{r} = ae\dot{E} \sin E \quad (\text{C.4})$$

が従う。この式と式 (A.10) によって、 \dot{E} は、

$$\dot{E} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\sin \theta}{\sin E} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad (\text{C.5})$$

と求められる。ここで、式 (C.2) を用いて $\sin \theta / \sin E$ を変形した。この \dot{E} の表式によって、 t に関する微分と E に関する微分の関係式：

$$\frac{d}{dE} = r \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{d}{dt} \quad (\text{C.6})$$

が導かれる。

また、エネルギー方程式 (A.1) と式 (C.3) より、

$$\frac{rv^2}{\mu} = 1 + e \cos E \quad (\text{C.7})$$

が成立する。

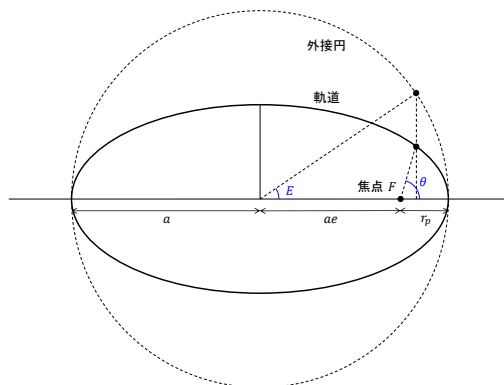


Fig. C.1 離心近点角 E の定義.

C.2 Lagrange の惑星方程式の変形

ここでは, Lagrange の惑星方程式の E による書き換えについて議論する. ここで用いる Lagrange の惑星方程式は, $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{n}\}$ 成分で摂動力を表現した形式であり, A.2.2 節で論じた手法で導くことができる. あるいは, \dot{a} に関しては, 元の形式 (A.2) で $\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f} = v f_T$ になることを用いて,

$$\dot{a} = \frac{2av^2}{\mu} f_T \quad (\text{C.8})$$

と直接に求めることもできる. さて, 式 (C.8) や式 (A.31) で, 摂動が抗力によって成されると仮定するならば,

$$\dot{a} = -\frac{a^2 \rho \delta v^3}{\mu}, \quad (\text{C.9})$$

$$\dot{e} = -\rho \delta v (e + \cos \theta) \quad (\text{C.10})$$

とできる. ここで, $\delta = SC_D/m$ である. なお, 式 (C.10) の $e + \cos \theta$ は, 式 (C.1), 式 (C.3) を用いて,

$$\begin{aligned} re + r \cos \theta &= ae(1 - e \cos E) + a(\cos E - e) \\ &= a(1 - e^2) \cos E \end{aligned}$$

より,

$$e + \cos \theta = \frac{a}{r} (1 - e^2) \cos E \quad (\text{C.11})$$

なので, 式 (C.10) を

$$\dot{e} = -\frac{a\rho\delta v}{r} (1 - e^2) \cos E \quad (\text{C.12})$$

とできる.

式 (C.6) を用いて, Lagrange の惑星方程式 (C.12), (C.9) の時間微分を E に関する微分で書きかえれば,

$$\begin{aligned} \frac{da}{dE} &= -\sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{ra^2 \rho \delta v^3}{\mu} \\ &= -a^2 \rho \delta \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{rv^2}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dE} &= -\sqrt{\frac{a}{\mu}} a \rho \delta v (1 - e^2) \cos E \\ &= -a \rho \delta \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{rv^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - e^2) \cos E \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

が得られる. これらの式に, 式 (C.3) や式 (C.7) を代入すれば,

$$\frac{da}{dE} = -a^2 \rho \delta \frac{(1 + e \cos E)^{\frac{3}{2}}}{(1 - e \cos E)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{de}{dE} = -a \rho \delta \left(\frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - e^2) \cos E \quad (\text{C.16})$$

とできる．ここで， e の代わりに $x = ae$ なる変数について考えよう． x の微分は，積の微分法より，

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dE} &= e \frac{da}{dE} + a \frac{de}{dE} \\
&= -ea^2\rho\delta \left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E} \right)^{\frac{1}{2}} (1+e\cos E) \\
&\quad - a^2\rho\delta \left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E} \right)^{\frac{1}{2}} (1-e^2)\cos E \\
&= a^2\rho\delta \left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E} \right)^{\frac{1}{2}} (e+\cos E)
\end{aligned} \tag{C.17}$$

が従う．

C.3 軌道進化

1周回分での a, x の進化は，式 (C.15)，式 (C.17) を $0 \leq E \leq 2\pi$ で積分すればよくて，

$$\Delta a = -a^2\delta \int_0^{2\pi} \frac{(1+e\cos E)^{\frac{3}{2}}}{(1-e\cos E)^{\frac{1}{2}}} \rho dE, \tag{C.18}$$

$$\Delta x = -a^2\delta \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E} \right)^{\frac{1}{2}} (e+\cos E) \rho dE \tag{C.19}$$

となる．この積分に具体的な ρ を代入する．いま，指数型大気を想定しているため，

$$\rho = \rho_{p0} \exp\left(-\frac{r-r_{p0}}{H}\right) \tag{C.20}$$

である．なお，この式の添え字の 0 は初期軌道での値を表している．いま， r_{p0} は，

$$r_{p0} = a_0(1-e) = a_0 - x_0 \tag{C.21}$$

であり，なおかつ r は E を用いて式 (C.3) のように表示できるので，これらを代入すると，

$$\rho = \rho_{p0} \exp\left\{\frac{1}{H}(a_0 - a - x_0 + x \cos E)\right\} \tag{C.22}$$

が従う．この表式を式 (C.18),(C.19) へ代入すれば，

$$\Delta a = -2\delta a^2 \rho_{p0} \exp\{\beta(a_0 - a) - z_0\} \int_0^\pi \frac{(1+e\cos E)^{\frac{3}{2}}}{(1-e\cos E)^{\frac{1}{2}}} \exp(z \cos E) dE, \tag{C.23}$$

$$\Delta x = -2\delta a^2 \rho_{p0} \exp\{\beta(a_0 - a) - z_0\} \int_0^\pi \left(\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E} \right)^{\frac{1}{2}} (e+\cos E) \exp(z \cos E) dE \tag{C.24}$$

となる．ここで， $z = ae/H$ であり，軌道の 1 周にわたる積分を，半周にわたる積分の 2 倍で表現している．ここで，次のような変数変換を考えよう．

$$\cos E = 1 - \frac{\lambda^2}{z}, \tag{C.25}$$

$$dE = \sqrt{\frac{2}{z(1-\lambda^2/z)}} d\lambda. \tag{C.26}$$

この変数変換によって積分を書き換え、 λ^2/z の冪で展開すると、

$$\begin{aligned} \Delta a = & -2\delta a^2 \rho_{p0} \sqrt{\frac{2}{z}} \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}}{(1-e)^{\frac{1}{2}}} \exp\{\beta(r_{p0} - r_p)\} \\ & \times \int_0^{\sqrt{2z}} \left\{ 1 - \frac{-1+8e-3e^2}{4(1-e^2)} \frac{\lambda^2}{z} + K_1 \frac{\lambda^4}{z^2} + O\left(\frac{\lambda^6}{z^3}\right) \right\} \exp(-\lambda^2) d\lambda, \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

$$\begin{aligned} \Delta x = & -2\delta a^2 \rho_{p0} \sqrt{\frac{2}{z}} \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}}{(1-e)^{\frac{1}{2}}} \exp\{\beta(r_{p0} - r_p)\} \\ & \times \int_0^{\sqrt{2z}} \left\{ 1 - \frac{3+e^2}{4(1-e^2)} \frac{\lambda^2}{z} + K_2 \frac{\lambda^4}{z^2} + O\left(\frac{\lambda^6}{z^3}\right) \right\} \exp(-\lambda^2) d\lambda. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

を得る。ここで、 K_1, K_2 は、

$$K_1 = \frac{3 - 16e + 50e^2 + 16e^3 - 5e^4}{32(1-e^2)^2}, \quad (\text{C.29})$$

$$K_2 = \frac{-5 + 32e - 14e^2 + 32e^3 + 3e^4}{32(1-e^2)^2} \quad (\text{C.30})$$

という表示を持つ係数である。ここで、長楕円軌道で z が大きいことを仮定すれば、

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda^2) d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \quad (\text{C.31})$$

$$\int_0^\infty \lambda^2 \exp(-\lambda^2) d\lambda = \frac{1}{4} \sqrt{\pi}, \quad (\text{C.32})$$

$$\int_0^\infty \lambda^4 \exp(-\lambda^2) d\lambda = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \quad (\text{C.33})$$

を使って積分を実行でき、

$$\Delta a = -2\delta a^2 \rho_{p0} \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}}{(1-e)^{\frac{1}{2}}} \exp\{\beta(r_{p0} - r_p)\} \left\{ 1 - \frac{-1+8e-3e^2}{8(1-e^2)} \frac{\lambda^2}{z} + \frac{3K_1}{4} \frac{\lambda^4}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \right\}, \quad (\text{C.34})$$

$$\Delta x = -2\delta a^2 \rho_{p0} \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}}{(1-e)^{\frac{1}{2}}} \exp\{\beta(r_{p0} - r_p)\} \left\{ 1 - \frac{3+e^2}{8(1-e^2)} \frac{\lambda^2}{z} + \frac{3K_2}{4} \frac{\lambda^4}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \right\} \quad (\text{C.35})$$

が得られる。これらの比をとれば、差分形式を得ることができて、

$$\frac{\Delta a}{\Delta x} = 1 + \frac{1-e}{2z(1+e)} + \frac{3-6e-e^2}{8z^2(1+e)^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \quad (\text{C.36})$$

という z の冪展開が従う。この展開式を線型近似して微分式にし、 $e = Hz/a$ 及び $x = Hz$ を用いて H, z で表示すれば、

$$\frac{1}{H} \frac{da}{dz} = 1 + \frac{1}{2z} - \frac{H}{a+Hz} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (\text{C.37})$$

となる。ここで、 a の z による展開を考えれば、

$$\begin{aligned} a & \approx a_0 + \left. \frac{da}{dz} \right|_0 \Delta z \\ & = a_0 - \frac{H}{e} (z_0 - z) \end{aligned}$$

であり，初期軌道が長楕円 $e \approx 1$ であることを仮定し，また，辺々を a_0 で割れば，

$$a \approx 1 - \frac{H}{a_0}(z_0 - z) \quad (\text{C.38})$$

が従う．これによって，式 (C.37) は，

$$\frac{1}{H} \frac{da}{dz} = 1 + \frac{1}{2z} - \frac{H/a_0}{1 - e_0 + 2Hz/a_0} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (\text{C.39})$$

と変形でき，これを積分して，

$$a_0 - a = H(z_0 - z) + \frac{H}{2} \ln \left\{ \frac{z_0(1 - e + 2Hz/a_0)}{z(1 + e)} \right\} + O\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right) \quad (\text{C.40})$$

が得られる．これを近火点距離 $r_p = a - Hz$ で表示すれば，

$$r_{p0} - r_p = \frac{H}{2} \ln \left\{ \frac{z_0(1 - e_0)}{z(1 + e_0)} + \frac{2e_0}{1 + e_0} \right\} + O\left(\frac{H}{z} - \frac{H}{z_0}\right) \quad (\text{C.41})$$

が得られ，これを z で表示すれば，

$$\frac{z_0}{z} = \frac{e_0(1 - e)}{e(1 - e_0)} + \frac{e_0}{2z(1 - e_0)} \ln \left\{ \frac{z_0(1 - e_0)}{z(1 + e_0)} + \frac{2e_0}{1 + e_0} \right\} + O\left\{ \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \right) \right\} \quad (\text{C.42})$$

となる．これを (C.41) へ代入すれば，

$$\frac{r_{p0} - r_p}{H} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{H(1 - e)}{2r_{p0}(1 + e)} \right\} \ln \frac{e_0(1 + e)}{e(1 + e_0)} + O\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right) \quad (\text{C.43})$$

が導かれる．

C.4 時間と離心率の関係

式 (C.35) の $r_{p0} - r_p$ を，(C.43) で置き換えれば，

$$\Delta x = -\delta\rho_{p0} a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2\pi H e_0}{1 + e_0} \frac{(1 + e)^2}{e\sqrt{1 - e}}} \left\{ 1 - \frac{3 + e^2}{8z(1 - e^2)} + \frac{H(1 - e)}{4r_{p0}(1 + e)} \ln \frac{e_0(1 + e)}{e(1 + e_0)} + O\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right) \right\} \quad (\text{C.44})$$

が導かれる．この式を時間微分の形式にするために，1周期にかかる時間 Δt を見積もれば，Kepler の第3法則より，

$$\Delta t = T = T_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{C.45})$$

となる．この Δt で先の Δx を除せば，

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\delta\rho_{p0}}{T_0} \sqrt{\frac{2\pi H a_0 e_0}{1 + e_0} \frac{(1 + e^2)}{e\sqrt{1 - e}}} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{3 + e^2}{8z(1 - e^2)} + \frac{H(1 - e)}{4r_{p0}(1 + e)} \ln \frac{e_0(1 + e)}{e(1 + e_0)} + O\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

という時間微分式が従う．また，式 (C.34) から同様にして，

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta\rho_{p0}}{T_0} \sqrt{\frac{2\pi H a_0 e_0}{1 + e_0} \frac{(1 + e^2)}{e\sqrt{1 - 2}}} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{-3e^2 + 8e - 1}{8z(1 - e^2)} + \frac{H(1 - e)}{4r_{p0}(1 + e)} \ln \frac{e_0(1 + e)}{e(1 + e_0)} + O\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

が得られる。これらの時間微分式から、 de/dt を書き下せば、

$$\begin{aligned} \frac{a}{a_0} \frac{de}{dt} &= \frac{1}{a_0} \frac{dx}{dt} - \frac{e}{a_0} \frac{da}{dt} \\ &= -\frac{\delta\rho_{p0}}{T_0} \sqrt{\frac{2\pi H a_0 e_0}{1+e_0} \frac{\sqrt{1-e}(1+e)^2}{e}} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{H(3+4e-3e^2)}{8ae(1-e^2)} + \frac{H(1-e)}{4r_{p0}(1+e)} \ln \frac{e_0(1+e)}{e(1+e_0)} + O\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right) \right\} \end{aligned} \quad (C.48)$$

となる。また、式 (C.43) より、

$$\frac{a}{a_0} = \frac{(1-e_0)r_p}{(1-e)r_{p0}} \approx \frac{1-e_0}{1-e} \left\{ 1 - \frac{H}{2r_{p0}} \ln \frac{e_0(1+e)}{e(1+e_0)} \right\} \quad (C.49)$$

であるので、(C.48) に代入することによって、

$$\begin{aligned} \frac{e}{(1-e)^{\frac{3}{2}}(1+e)^2} \left[1 + \frac{H}{4r_{p0}} \left\{ \frac{3+4e-3e^2}{2e(1+e)} - \frac{3+e}{1+e} \ln \frac{e_0(1+e)}{e(1+e_0)} \right\} \right] \\ = -\frac{\delta\rho_{p0}}{(1-e_0)T_0} \sqrt{\frac{2\pi H a_0 e_0}{1+e_0}} \frac{dt}{de} \left[1 + O\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right) \right] \end{aligned} \quad (C.50)$$

となる。ここで、左辺の log 項は e が十分に大きいとき ($0.2 < e < 1$) に負であり、正定値の $\frac{3+4e-3e^2}{2e(1+e)}$ の項を減少させる向きに作用する。その減少の割合は 0.4 ($(e, e_0) = (0.3, 1)$ のとき) から 0 ($e = e_0$ のとき) 程度であり、係数 $\Lambda = 0.8 \times (1 \pm 0.25)$ を乗ずることでこの変化を表現することにする。これを踏まえて積分すれば、

$$\begin{aligned} \left[\left\{ \frac{1}{2\sqrt{1-e}} + \frac{\sqrt{1-e}}{4(1+e)} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}} \right\} \right. \\ \left. + \frac{H}{10r_p} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-e}} - \frac{(9+13e)\sqrt{1-e}}{8(1+e)^2} - \frac{21}{8\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}} \right\} \times (1 \pm 0.25) \right]_{e_0}^e \\ = \frac{1}{4} Ct \left[1 + O\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right) \right] \end{aligned} \quad (C.51)$$

となる。ここで、

$$C = \frac{4\delta\rho_{p0}}{(1-e_0)T_0} \sqrt{\frac{2\pi H a_0 e_0}{1+e_0}} \quad (C.52)$$

である。また、式 (C.51) 左辺の $\frac{H}{10r_p}$ が乗してある項の $\{$ 内は、左辺第 1 項に対して、 $e = 0.2 \sim 1$ で -2 から 2 倍までしか変化しない。すなわち、第 1 項目の $H/5r_p$ 倍以下と評価できるので、この項は無視することにする。これらを踏まえて、(C.51) を計算しなおせば、

$$Ct \left[1 + O\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}, \frac{H}{5r_p}\right) \right] = \frac{3+e_0}{(1+e_0)\sqrt{1-e_0}} - \frac{3+e}{(1+e)\sqrt{1-e}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\{\sqrt{2} + \sqrt{1-e_0}\}\sqrt{1+e}}{\{\sqrt{2} + \sqrt{1-e}\}\sqrt{1+e_0}} \quad (C.53)$$

という離心率と時間が一対一対応した式が従う。ここで、 $e = 0$ となるまでの時間 (真円化時間) T_e を求めれば、

$$T_e = \frac{1}{C} \left\{ \frac{3+e_0}{(1+e_0)\sqrt{1-e_0}} - 3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1-e_0}}{(\sqrt{2}+1)\sqrt{1+e_0}} \right\} \quad (C.54)$$

C.5 抗力時間を用いた表示

C に T_0 が含まれていることに着目する。Kepler の第 3 法則より,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad (\text{C.55})$$

である。ここで、近日点距離 $r_p = a(1 - e)$ とエネルギー方程式 $GMr_p = v_c^2 r_p^2$ を使うと,

$$T_0 = \frac{2\pi r_p}{v_c} (1 - e)^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{C.56})$$

が従う。また、 $2/(\delta\rho v_c) = T_d$ も合わせて、(C.54) を変形すれば,

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{(1 - e)T_0}{4\delta\rho_{p0}} \sqrt{\frac{1 + e}{2\pi H a_0 e}} \left\{ \frac{3 + e_0}{(1 + e_0)\sqrt{1 - e_0}} - 3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 - e_0}}{(\sqrt{2} + 1)\sqrt{1 + e_0}} \right\} \\ &= \frac{T_d}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi r_p (1 + e_0)}{e_0 H}} \left\{ \frac{3 + e_0}{(1 + e_0)\sqrt{1 - e_0}} - 3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 - e_0}}{(\sqrt{2} + 1)\sqrt{1 + e_0}} \right\} \\ &= \frac{T_d}{4} \sqrt{\frac{2\pi r_p}{H}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{1 - e_0}} - 2.37677 \right\} \quad \text{as } e_0 \rightarrow 1 \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

が従う。これが求めるべき式である。

参考文献

- [1] **Benjamin, A. B. & M. Tushar (2015)**,
“The demise of Phobos and development of a Martian ring system”,
Nature Geosci. 8:913-917 (2015).
- [2] **Burns, J. A. (1992)**, “Contradictory clues as to the origin of the Martian moons.”
in Kieffer, H. H., B. M. Jakosky, C. W. Snyder & M. S. Matthews, “*Mars*”,
University of Arizona Press, Tucson, 1283-1301.
- [3] **Citron, R. I., H. Genda & S. Ida (2015)**, “Formation of Phobos and Deimos via a giant impact”,
Icarus, 252:334-338.
- [4] **Craddock, R. A. (1994)**, “The origin of Phobos and Deimos”,
Lunar. Planet. Sci. XXV:293-294.
- [5] **Craddock, R. A. (2011)**, “Are Phobos and Deimos the result of a giant impact?”,
Icarus, 211:1150-1161.
- [6] **Hamelin, M. (2011)**,
“Motion of blocks on the surface of Phobos: new constraints for the formation of grooves”,
Planet Space Sci., in press.
- [7] **Hunten, D. M. (1979)**, “Capture of Phobos and Deimos by protoatmospheric drag”,
Icarus 37:113-128.
- [8] **Jacobson, R. A. (2010)**,
“The orbits and masses of the Martian satellites and the libration of Phobos”,
Astron. J., 139:668-679.
- [9] **King-Hele, D. (1964)**, “*Theory of satellite orbits in an atmosphere*”,
Butterworths Mathematical Texts, London.
- [10] **Lainey, V., V. Dehant & M. Pätzold (2007)**,
“First numerical ephemerides of the Martian moons”,
Astron. Astrophys., 465.
- [11] **Lambeck, K. (1979)**, “On the orbital evolution of the Martian satellites”,
J. Geophys. Res. B 84(10):5651-5658.
- [12] **Mesinger, F. & A. Arakawa (1976)**, “*Numerical methods used in atmospheric models*”,
GARP Publications Series (World Meteorological Organization), No. 17, Part 1.
- [13] **Murray, C. D. & S. F. Dermott (2000)**, “*Solar system dynamics*”,
Cambridge University Press, Cambridge.
- [14] **Murray, J. B., J. C. Iliffe, J. P. A. L. Muller, G. Neukum, S. Werner, M. Balme & the HRSC Co-Investigator team (2006)**,
“New evidence on the origin of Phobos’ parallel grooves from HRSC Mars Express”,
Lunar. Planet. Sci. Conf. XXXVII:2195.
- [15] **Nelson, M. L., D. T. Britt & L. A. Lebofsky (1993)**, “Review of asteroid compositions”

- in Lewis, J. S., M. S. Matthews, & M. L. Guerrieri, “*Resources of near Earth space*”, University of Arizona Press, Tucson, 493-522.
- [16] **ÖPIK, E. J. (1958)**, “*Physics of meteor flight in the atmosphere*”, Interscience, New York.
- [17] **Rivkin, A. S., R. H. Brown, D. E. Trilling, J. F. Bell III & J. H. Plassmann (2002)**, “Near-Infrared Spectrophotometry of Phobos and Deimos”, *Icarus* 156:64-75.
- [18] **Rosenblatt, P. (2011)**, “The origin of the Martian moons revisited”, *Astron. Astrophys. Rev.* (2011) 19:44.
- [19] **Safronov, V. S. et al. (1986)**, “Protosatellite swarms” in Burns, J. A. & M. S. Matthews, “*Satellites*”, University of Arizona Press, Tucson, 89-116.
- [20] **Sasaki, S. (1990)**, “Origin of Phobos – aerodynamic drag capture by the primary atmosphere of Mars”, *Lunar Planet Sci.* XXI:1069-1070.
- [21] **Schults, P. H. & A. B. Lutz-Garihan (1982)**, “Grazing impacts on Mars : A record of lost satellites” *Proc. Lunar Sci. Conf. 13, J. Geophys. Res. Suppl.* 87:A84-A96.
- [22] **Singer, S. F. (2007)**, “Origin of the Martian satellites Phobos and Deimos” in “*Workshop on the exploration of Phobos and Deimos*”, p 7020.
- [23] **Szeto, A. M. K. (1983)**, “Orbital evolution and origin of the Martian satellites”, *Icarus*, 55:133-168.
- [24] 小林 昭七 (1995), “曲線と曲面の微分幾何”, 裳華房.
- [25] 十河 清 (2011), “解析力学と交換子”, 数理科学, No. 576.
- [26] 牧野 淳一郎 (2011), “惑星集積過程の多体シミュレーション”, 東京工業大学・地惑セミナー資料.
- [27] **HiRISE (The University of Arizona)**.
<http://www.uahirise.org/phobos.php>
<http://www.uahirise.org/deimos.php>

