Coherent 状態に関する幾つかの問題

松岡 亮／ Matsuoka Ryo

基底状態 $|0\rangle$ に上昇演算子 $\hat{a}^\dagger$ の指数関数を施して得られる状態：

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger)\,|0\rangle \tag{1}$$

は，coherent 状態と呼ばれる．ただし，$\alpha \in \mathbb{C}$.

1. coherent 状態が下降演算子 $\hat{a}$ の固有状態となることを示せ．

$|\alpha\rangle$ を，$|0\rangle$ からの励起を意識して式変形を行うと，

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger)\,|0\rangle = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k (\hat{a}^\dagger)^k}{k!}\right)|0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \frac{(a^\dagger)^k}{\sqrt{k!}}\,|0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}}\,|k\rangle \tag{2}$$

となり，これに下降演算子を作用させる．無限和であることと，$a < 0 \Rightarrow |a\rangle = 0$ ということに気を付ければ，

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}}\,\hat{a}\,|k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}}\sqrt{k}\,|k-1\rangle = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k-1}}{\sqrt{(k-1)!}}\,|k-1\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \tag{3}$$

と計算でき，$|\alpha\rangle$ は下降演算子の固有状態であることがわかる．

2. coherent 状態間の内積 $\langle\beta^*|\alpha\rangle$ の計算せよ．

先ほどと同様に $\langle\beta^*|$ を計算すれば，

$$\langle\beta^*| = \langle 0|\exp(\beta^*\hat{a}) = \langle 0|\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta^*)^k \hat{a}^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta^*)^k}{\sqrt{k!}} \left(\frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{k!}}\,|0\rangle\right)^\dagger = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta^*)^k}{\sqrt{k!}}\,|k\rangle^\dagger = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta^*)^k}{\sqrt{k!}}\,\langle k| \tag{4}$$

とできる．よって，内積は，

$$\langle\beta^*|\alpha\rangle = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta^*)^k}{\sqrt{k!}}\,\langle k|\right]\left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha^l}{\sqrt{l!}}\,|l\rangle\right] \tag{5}$$

となるが，ここで正規直交関係 $\langle k|l\rangle = \delta_{kl}$ を思い出すと，$k \neq l$ の項は 0 となることがわかる．残った項を添え字 k にまとめれば，

$$\langle\beta^*|\alpha\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta^*)^k}{\sqrt{k!}} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}}\,\langle k|k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta^*\alpha)^k}{k!} = \exp(\alpha\beta^*). \tag{6}$$

3. coherent 状態が第 n 励起状態を含む確率の計算せよ．

第 n 励起状態と，coherent 状態との内積を取ればよい．規格化定数を C とおけば，

$$p(n) = \frac{1}{C}\,|\langle n|\alpha\rangle|^n = \frac{1}{C}\left|\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,\langle n|n\rangle\right| = \frac{|\alpha|^n}{C\sqrt{n!}}. \tag{7}$$

ただし，規格化定数は，$C = \langle\alpha^*|\alpha\rangle = \exp(|\alpha|^2)$ と求められる．