

金星スーパーローテーションの
理解のための基礎知識：
TEM 方程式と熱潮汐波

小野寺 玲旺
Reo Onodera

学籍番号：02222042

北海道大学 理学部 地球惑星科学科
地球流体力学研究室 4 年

指導教員：石渡 正樹 教授

2026 年 3 月 30 日

要旨

金星には、スーパーローテーション (以下, SR) と呼ばれる特徴的な循環構造がある。その存在は、パイオニア・ヴィーナスやヴェネラなどから得られたデータにより確認されてきた。しかし、そのメカニズムについては未解明な部分が多かった。そのような中、2010 年に JAXA によって打ち上げられた「あかつき」という金星探査機が 2025 年に運用終了するにいたるまでに多くの有益な情報をもたらした。Horinouchi et al. (2020) ではその「あかつき」のデータを用いて SR の維持メカニズムに関する研究を行った。そのため、今回の卒業論文では Horinouchi et al. (2020) のレビューを通して SR の維持メカニズムを理解することを目的とした。Horinouchi et al. (2020) は、あかつきの紫外イメージャ、中間赤外カメラや、金星標準大気 VIRA などのデータを用いて熱潮汐波や残差循環、乱流等の SR への寄与を調べている。その結果、熱潮汐波が SR の加速という重要な役割を担っていることを明らかにされた。このレビューの過程において TEM 方程式と波 (特に熱潮汐波) に関する知識を得る必要が生じたため、教科書や論文の講読を行った。TEM 方程式に関しては、Andrews et al. (1987) と Vallis (2017) の講読を行った。その結果、TEM 方程式とは、東西平均操作を行うときに単純な東西平均ではなく、熱的な効果も加味した子午面循環である残差循環を用いた方程式系のことだということが分かった。また、この方程式系を使うことでポテンシャル渦度の役割が強調されて渦の効果が考えやすくなることも学んだ。熱潮汐波に関しては、Andrews et al. (1987), Longuet-Higgins (1968), Vallis (2017) の講読を行った。その結果、熱潮汐波とは、太陽加熱によって励起される波であり、自転によって最加熱点が移動することで自転と逆方向に伝播する波であることと、この波は金星では東向き角運動量 (自転逆向き) を持ち、それを中緯度に輸送していることを理解した。今後の課題は、Horinouchi et al. (2020) を読み進め、SR の維持メカニズムについて理解していくことである。

目次

第 1 章	導入	1
第 2 章	Horinouchi et al. (2020) のまとめ	8
2.1	Horinouchi et al. (2020) の目的	8
2.2	物理量に対する平均と擾乱の記号の定義	8
2.3	熱的に誘起された子午面循環と理想的な東西風分布のモデル	9
2.4	あかつきのデータの解析手法	13
2.4.1	あかつきのデータからの風推定	13
2.4.2	風推定誤差の評価	14
2.4.3	u' と v' の誤差共分散の推定	14
2.4.4	潮汐角運動量フラックスの推定	15
2.4.5	スペクトル解析	16
2.4.6	潮汐熱フラックスの推定	17
2.5	結果	17
2.5.1	熱的に誘起された子午面循環と理想的な東西風分布のモデルの結果	17
2.5.2	あかつきのデータからの風推定の結果	17

2.5.3	風推定誤差の評価の結果	20
2.5.4	u' と v' の誤差共分散の推定の結果	21
2.5.5	潮汐角運動量フラックスの推定の結果	21
2.5.6	スペクトル解析の結果	25
2.5.7	潮汐熱フラックスの推定の結果	28
2.6	議論	30
2.6.1	風推定誤差の評価について	30
2.6.2	u' と v' の誤差共分散の推定について	31
2.6.3	潮汐角運動量フラックスの推定について	31
2.6.4	スペクトル解析について	31
2.6.5	潮汐熱フラックスの推定について	32
2.6.6	金星における SR の維持について	32
2.7	考察	33
第 3 章	Transformed Eulerian Mean(TEM) 方程式	34
3.1	TEM 方程式とは	34
3.2	TEM 方程式の導出	35
3.2.1	基礎方程式	35
3.2.2	TEM 方程式の導出	36
3.2.3	角運動量・温度を用いた TEM 方程式の表現	37
第 4 章	波を記述する方程式	40

4.1	ラプラスの潮汐方程式の導出	40
4.1.1	基礎方程式	40
4.1.2	帯状平均流に対する線形化された擾乱	41
4.1.3	静止した球殻大気への波動擾乱	43
4.2	熱潮汐波	49
4.2.1	熱潮汐波とは	49
4.2.2	古くから用いられている潮汐理論	50
第 5 章	まとめ	54
謝辞		55
付録 A	Horinouchi et al. (2020) の全訳	56
付録 B	補足：TEM 方程式	70
B.1	式 (3.1) の導出	70
B.2	式 (3.4) の導出	76
B.3	式 (3.6) の導出	79
B.4	Vallis (2006) での TEM 方程式の導出	83
B.4.1	基礎方程式に対するブシネスク近似	83
B.4.2	ブシネスク方程式系に対する準地衡流近似	88
B.5	熱の式 (B.84) の導出	93
B.6	式 (B.115) に対する東西平均場が満たす方程式系	94

付録 C	補足：波を記述する方程式	97
C.1	式 (4.10) の導出	97
C.2	式 (4.18a) の下方境界条件の導出	99
C.3	式 (4.20a), (4.20b), (4.21a) の導出	101
C.4	式 (4.31) の導出	104
C.5	鉛直伝播擾乱の平均波エネルギーの減衰の証明	108
参考文献		111

第 1 章

導入

金星は太陽系に位置する惑星の一つであり、下の表 1.1 に示されるように地球とよく似た半径や質量をしている。そのため平均密度も地球と近く、それゆえにその組成も似ていると考えられている。

表 1.1: 金星と地球の比較.

惑星諸量		金星	地球
半径	[km]	6052	6378
質量	[kg]	4.87×10^{24}	5.97×10^{24}
自転傾斜角	[deg]	177	23.4
自転周期	[Earth day]	243	1
雲の分布		常時全球的に 厚い硫酸の雲	断続的に赤道域や 中緯度帯に水蒸気の雲

ただし金星と地球には違いもある。表 1.1 に挙げられている違いとして、まずは自転方向が逆なことがある。そのため、日周変化の進行方向も逆となる。次に、金星の方が自転周期が極端に長いことがある。これにより、昼側が長時間連続して太陽による加熱を受けるようになる。最後に、雲が地球では赤道域や中緯度帯でまばらに存在しているのに対し、金星では全球的に厚い硫酸の雲が存在していることがある [12]。図 1 を見ると、それゆえに、雲の部分において太陽放射の強い吸収が起き、大きな加熱が生まれる。このように金

星と地球の違いはいくつか挙げられるが、ほかには循環場の違いがある。

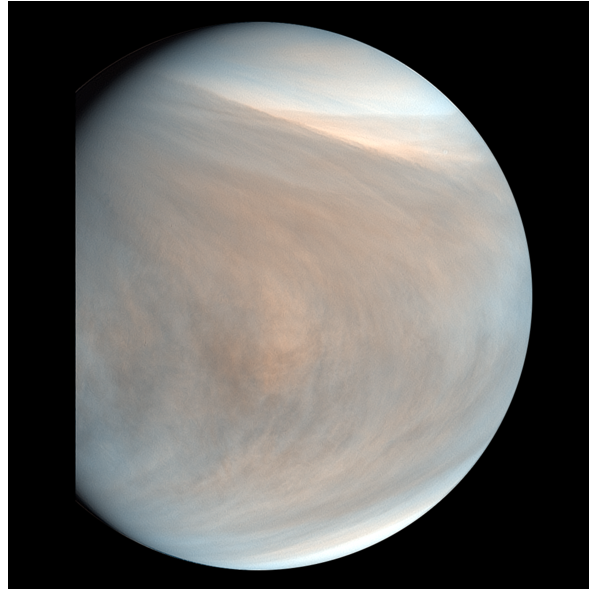


図 1: あかつきの UVI で撮られた金星の画像. 283nm から得られたものを青で、365nm から得られたものを赤で、その両方から得られたものを緑で示している. JAXA による.

金星において特徴的な循環場として、スーパーローテーションと呼ばれる現象がある。スーパーローテーション (以下, SR と呼ぶ) とは赤道域を含む天体の広い領域で大気 of 自転方向速度が天体の自転速度を上回る現象を指す。金星において SR は全域で起きており、金星の赤道域高度約 60-70km で風速が 100m/s ほどに達するほど高速な自転向き循環が形成されている [14]。このときの大気の角速度は自転角速度の 60 倍になるほどである。

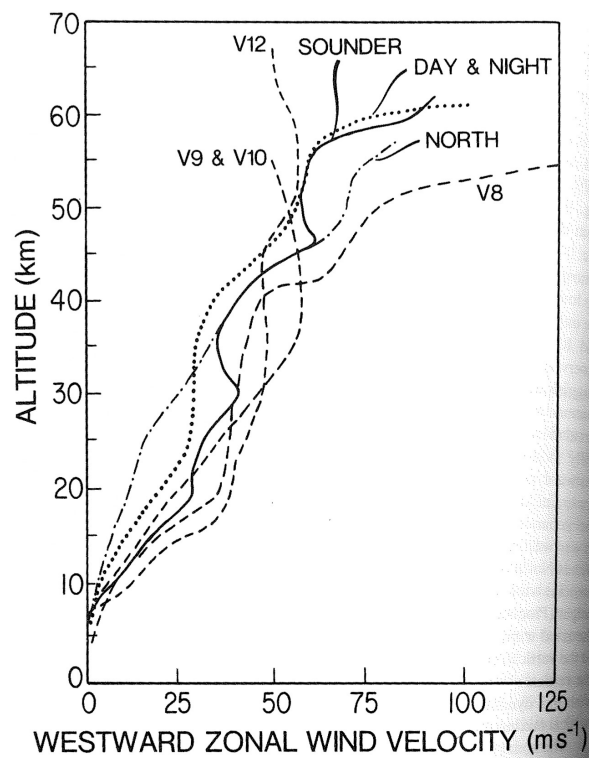


図 2: 西向き風の鉛直分布. SOUNDER, DAY & NIGHT, NORTH はパイオニア・ヴィーナスの 4 つのプローブから, V8, 9 & 10, 12 はヴェネラから得られたものである. それぞれの突入地点は図 3 を参照のこと. Schubert (1983) による.

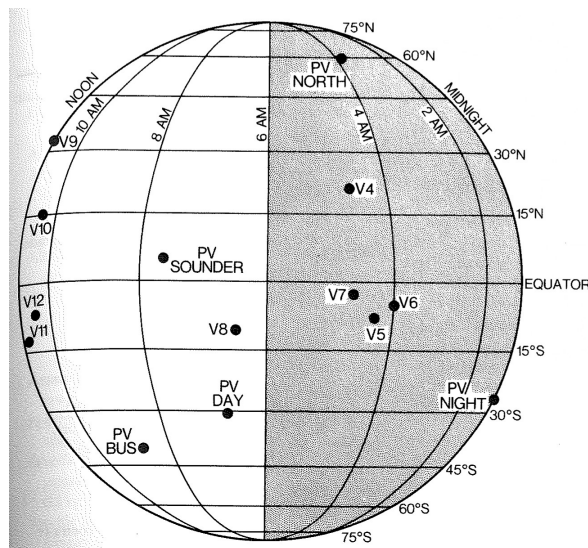


図 3: 金星探査機の突入時の緯度と現地時間を表した図. PV がパイオニア・ヴィーナスを表し, SOUNDER, DAY, NIGHT, NORTH はその 4 つのプローブを表す. また, V4-12 はヴェネラの 4-12 号機を表す. BUS は PV の 4 つのプローブを運ぶことと観測の 2 つの役割がある. Schubert (1983) による.

図 2 のパイオニア・ヴィーナス (PV) やヴェネラ (V) から得られたデータを見ると, すべてのデータにおいて自轉向きの風が吹いていて, 西向き風速が 100m/s を超えているものもある. そのため, 金星では SR が実際に起きていると分かる. また, 図 3 を見ていくと, 図 2 にデータが載っている中で最も北に突入したものは北緯 60 度に, 最も南には南緯 30 度に突入している. これらの事実より, 少なくとも北緯 60 度から南緯 30 度の間では SR が起きていると考えることができる. また, 地方時についても 0 時から 12 時までの範囲で SR が起きていると考えることができる. そのため, SR はいつどこであっても起きていると考えられる.

ここからは, SR 発生に必要なプロセスについて考える. ここでは, 静止系でかつ薄い大気と正の自転角速度をもつ天体を考える. 静止系から見た速度を $\mathbf{v} = (u, v, w)$ とすると, 実際に天体で観測される風 $\mathbf{v}^{\text{wind}}$ は自転の効果も加味されるので, $\mathbf{v}^{\text{wind}} = \mathbf{v} - a\Omega\mathbf{i}$ となる. ただし, a は惑星半径, Ω は自転角速度, $\mathbf{i}$ は東方向の単位ベクトルである. さらに, 単位質量当たりの自転軸方向角運動量 L を考える. 自転軸から垂直に伸びるベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ を用いると L は $L = ru$ と表せる. また, 角運動量は保存量である. ここで, 赤道地表面での風速が 0 の空気塊が子午面循環によって上昇することを考える.

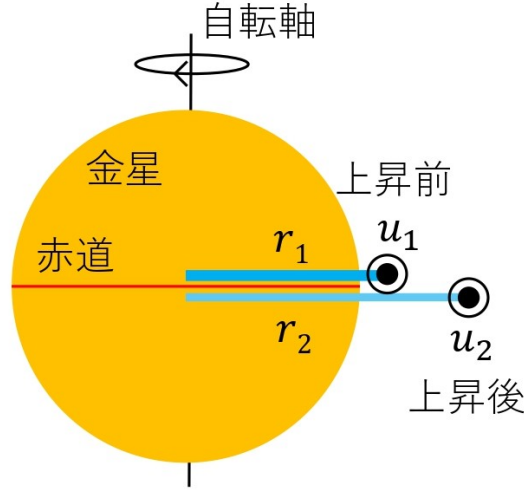


図 4: 赤道地表面での風速が 0 の空気塊が子午面循環によって上昇する前後の模式図．金星における図のため，速度は逆になっている．

赤道地表面での風速が 0 であると考えるのは，地表面の方が上層と比べて風速が小さいからである．また子午面循環とは，ハドレー循環などの緯度-高度循環のことを指す．すると，角運動量が保存されるので上昇前後をそれぞれ添え字の 1 と 2 で表すと

$$r_1 u_1 = r_2 u_2 \quad (1.1)$$

となる．ただしこのとき， $u_1 = a\Omega$ が成り立っている．ここでこの空気塊は子午面循環に乗って上昇していることを考えると， $r_1 < r_2$ といえる．つまり， u については $u_1 > u_2$ となる．よって，上昇後の風速 u_2^{wind} は， $u_2^{\text{wind}} = u_2 - a\Omega < u_1 - a\Omega = 0$ となり，上昇後の風速が負，つまり自転方向と逆方向に風が吹くと考えられる．同様に負の自転角速度で考えても自転方向と逆方向に風が吹くと考えられると分かる．しかし金星では，全球的に上空で自転向きの風が吹いている．よって，SR が起きるには何らかの角運動量輸送プロセスによって赤道域に角運動量が運ばれる必要があるといえる．

かつて考えられていた金星における SR の維持メカニズムは古典的 Gierasch-Rossow-Williams シナリオと呼ばれている [13]．これは，子午面循環による極方向への西向き AM 輸送となんらかの波による赤道方向への西向き AM 輸送が釣り合っている事によって，赤道付近での AM の偏在が維持されているというものだ．これに対して，非古典的 Gierasch-Rossow-Williams シナリオと呼ばれるものもある [13]．古典的なものとの違いは，なんらかの波は子午面循環と同じで極方向へ西向き AM 輸送をしていて，西向き AM

輸送は熱潮汐波が AM の偏在域の上下方から輸送してくるというものである。古典的な方は主に水平方向の AM 輸送によって、非古典的な方は主に鉛直方向の AM 輸送によって SR が維持されていると考えているという違いがある。

金星の探査機として JAXA が打ち上げた「あかつき」がある。SR の謎に迫るために金星の 3 次元的な大気の流れを明らかにすることがあかつきの目的であり、そのためにこの探査機には 5 つのカメラ (UVI, IR1, IR2, LIR, LAC) と、1 つの発振器 (USO) が取り付けられている [18]。UVI (紫外イメージャ) は二酸化硫黄や未知の化学物質の雲頂付近における分布を紫外線でとらえて、その分布の模様を追跡することで雲頂高度での風速分布を調べられる。IR1 (1 μm カメラ) は金星の雲の下や地表付近まで透過できる 1 μm 付近の波長を利用して、異なる波長の赤外線強度を比較することで、下層大気における雲の動きや水蒸気分布、地表面の鉱物組成、また活動を続けている火山の有無等を調べることができる。IR2 (2 μm カメラ) は金星の雲の下まで透過できる 2 μm 付近の波長を利用して雲の濃さや雲粒の大きさ、一酸化炭素の分布などを観測することによって、下層大気の流れや雲のでき方について調べられる。また、金星に到達するまでの間に黄道光の観測を行い、太陽系内に広がっているダストについて調べることができる。LIR (中間赤外カメラ) は 10 μm の波長をもつ赤外線で雲上端の温度の観測を行うことができる。雲頂の 2 次元的な温度分布より雲層上部の波動や対流活動、昼夜にわたる雲頂高度における風速分布を調べられる。LAC (雷・大気光カメラ) は 3 万分の 1 秒間の明るさの変化をとらえることができるカメラによって、短時間の間に生じる雷放電を検出し、金星での雷放電発光の有無について調べられる。また、高度 100km 付近の高層大気の酸素が放つ大気光という淡い光をとらえて、昼面と夜面の間の大気の流れや大気波動の映像化を行う。USO (超高安定発振器) は、あかつきが金星の後ろに隠れた際に金星大気をかすめて届く電波の受信周波数が変化することを利用して、気温や硫酸蒸気の分布を推定できる。この探査機は 2010 年に打ち上げられ、実際に軌道投入されたのは 2015 年であった。その後、2024 年に後期運用中に通信断絶し、2025 年に運用を終了している。

観測からは金星では SR が起きていることが示唆されているが、そのプロセスは前述の通り未ださまざまな角運動量輸送プロセスが考えられている [13]。今回の研究の動機は、その角運動量輸送プロセスについて理解したいからである。その為に、その角運動量輸送プロセスに関する論文である Horinouchi et al. (2020) を読むことにした。今回の卒業研究では Horinouchi et al. (2020) を読む過程で、TEM 方程式と波 (特に熱潮汐波) について理解する必要が出てきたため、それらの内容についてをまとめた。本卒業研究では、金星にお

ける SR を引き起こす角運動量輸送プロセスの理解のために基礎的なことを学びそれをまとめることを目的とする。

本論文の構成は、まず第 2 章で Horinouchi et al. (2020) の内容についてまとめる。第 3 章では Horinouchi et al. (2020) を読む中で勉強の必要が出てきた TEM 方程式について学んだことをまとめ、第 4 章では TEM 方程式のほかに勉強の必要が出てきた波 (特に熱潮汐波) について学んだことをまとめる。そして、第 5 章では、全体のまとめを行う。また、付録 A では Horinouchi et al. (2020) の 2 ページ目第 5 段落までの訳を載せ、付録 B, C ではそれぞれ TEM 方程式と波に関する式の本文に掲載しきれなかった詳しい導出を載せる。

第 2 章

Horinouchi et al. (2020) のまとめ

2.1 Horinouchi et al. (2020) の目的

この論文では、Venus International Reference Atmosphere (VIRA) [11] から得られる下向き太陽フラックスから熱的に誘起された子午面循環を推定することが目的の一つである。また、金星探査機あかつきの紫外イメージャ (UVI) の紫外放射輝度データを用いて雲追跡での雲頂での風速場を推定や、中間赤外カメラ (LIR) から得られた輝度温度データを用いた雲頂付近の温度場を推定もまた目的である。Horinouchi らはこれらの推定によって、金星における角運動量収支とそれにより SR がどのように維持されているかの解明を目指すことが大きな目標である。

2.2 物理量に対する平均と擾乱の記号の定義

最初に、これからの議論で用いる記号の定義をまとめておく。

$\langle x \rangle$: x の東西平均 (経度に沿った平均)。定義上東西平均である量 ($M, \mathbf{v}^r, \mathbf{F}$) は、角括弧なしで表される。

$x^* \equiv x - \langle x \rangle$: 東西平均からの偏差。

$\bar{x}$: 固定された τ_L と φ に対する x の時間平均。

$x'' \equiv x - \bar{x}$: 時間平均からの偏差。

$\tilde{x}$: 固定された τ_L と φ に対する ± 15 days にわたる x の時間移動平均.

$x' \equiv x - \tilde{x}$: 時間移動平均からの偏差.

$x^\#$: 固定された τ_L と φ に対する, 雲追跡によって導出された量 x (したがって x は u または v) の世界時ベースの暦日にわたる日平均.

2.3 熱的に誘起された子午面循環と理想的な東西風分布のモデル

理想的な非断熱加熱分布を用いて平均ラグランジュ子午面循環 v^r を大まかに見積もる. 高度 100km までの長波加熱と下層雲領域での対流加熱の南北差が太陽放射のものよりもはるかに小さいとし, 太陽放射の南北構造が $\cos \varphi$ に比例すると考えると, 非断熱加熱の南北分布も $\cos \varphi$ に比例すると考えることができる. すると, 単位質量当たりの非断熱加熱は

$$Q = h(\varphi) \frac{\partial F(z)}{\rho \partial z} \quad (2.1)$$

と書ける. ただし, $h(\varphi) = \frac{4}{\pi} \cos \varphi - 1$ であり, ρ は密度である. ここで, h の -1 の項は全球平均加熱を 0 にするための長波加熱や対流加熱に対応していて, $4/\pi$ は $\cos \varphi = (1 - \mu^2)^{1/2}$ の μ による積分を正規化するための係数である¹⁾.

F の高度分布は, VIRA から得られる下向き太陽フラックスに対する 3 次スプライン補間によって与えられている²⁾. ただし, 地表面での吸収太陽放射フラックスによる加熱を 0 から 10km の間でほぼ均等に吸収させるために, $z = 0$ で $F = 0$ とした.

ここで, 無次元対数圧力高度 $\zeta \equiv -\ln p/p_{00}$ (p_{00} は地表面気圧) を導入し, 正規化した対数圧力鉛直速度を $w^* \equiv \frac{D\zeta}{Dt}$ と定義する. 多くの場合全球一定のスケールハイトを用いるが [1, etc.], 金星ではスケールハイトが高度によって大きく変わるため, 対数圧力鉛直速度を $w \equiv Hw^*$ と定義する. ここで, $H = RT/g$ は高度に依存する量であり, R は気体定数, g は重力加速度である. 定常状態において, 水平温度移流性を無視するならば, 正規化された残差平均鉛直速度 w^{*r} と Q の関係は

$$HSw^{*r} = Q \quad (2.2)$$

¹⁾ Horinouchi et al. (2020) の Supplementary Materials には $\cos \varphi = (1 - \mu)^{1/2}$ とあったが, おそらく誤植である.

²⁾ VIRA のデータから, 0, 10, 20, 30, 40, 48, 58, 70, 72, 76, 80, 90, 100km でのデータを得ている.

となる．ここで，安定度 S は

$$S = \Gamma + \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.3)$$

である．ただし， Γ は断熱温度減率である．ここで正規化した南北速度 $v^* \equiv \frac{D\mu}{Dt}$ を導入すると， $v = a(\cos \varphi)^{-1} v^*$ のように表せる．正規化した残差速度成分は，一種の質量流線関数 χ を通じて以下のように関係づけられる．

$$pv^{*r} = -\frac{\partial \chi}{\partial \zeta}, \quad pw^{*r} = \frac{\partial \chi}{\partial \mu}. \quad (2.4)$$

式 (2.1)-(2.4) と補間された F ，そして VIRA (39) での T, g, Γ を用いて χ について解くと以下のような結果が得られる．

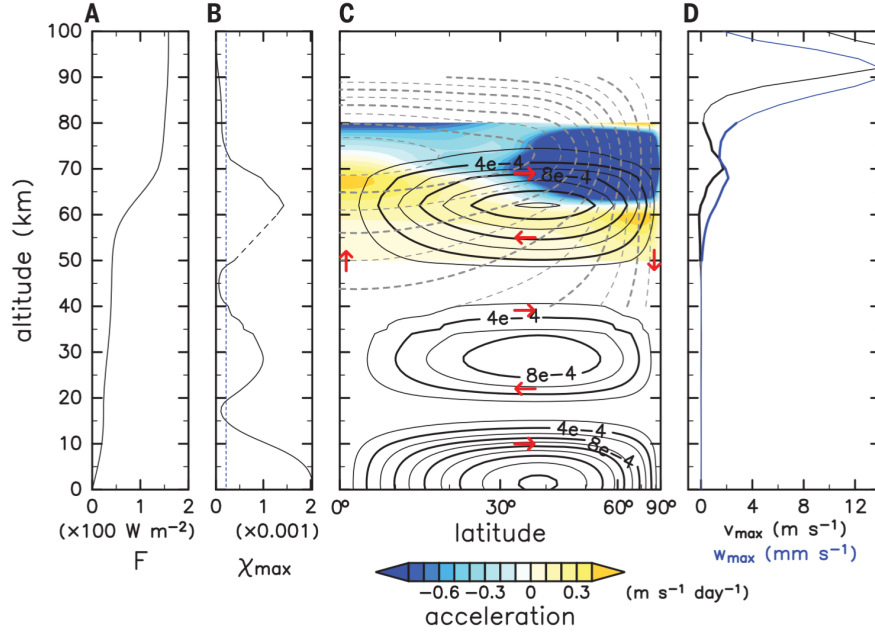


図 5: 太陽加熱から得られた子午面循環の理想モデル計算と理想化された帯状角運動量の移流による加速. (A) は下向きの全球平均太陽放射フラックス F . 縦軸は高度で、横軸はフラックス量である. (B) は $\varphi_{\max} = 38.2^\circ$ での太陽加熱から得られた質量流線関数 χ である. 破線は補間した領域を、青い点線は高度 74km での値を示している. 縦軸は高度で、横軸は質量流線関数の値である. (C) では、黒い等値線が χ の半球構造を (流れる方向は赤い矢印で概略的に示されている), 灰色の破線の等値線は高度 40km から 90km の間の理想的な M を、色のグラデーションは高度 50km から 80km の間での移流による帯状流の加速 $-(a \cos \varphi)^{-1} \mathbf{v}^r \cdot \nabla M$ を示している. 縦軸は高度で、横軸は緯度である. (D) では、黒い線は $\varphi_{\max}$ での v^r を、青い線は赤道での w^r を示している. また、太い線は高度 50km から 80km の間の値を強調している. 縦軸は高度で、横軸は v^r, w^r の速度である.

この図において S の最小値は $1 \times 10^{-3} \text{Km}^{-1}$ に設定されている. また、理想的な角運動量の分布を調べる際には TEM 方程式を用いて計算されている³⁾. 結果として得られた χ は、安定度が低い領域であるがゆえに 55km 付近でスパイク状のピークができ、このピークは設定した S の最小値に依存していた. このピークは偽のものであると思われるため、図 5B では 50-60km の部分を線形補間し、そこを破線で表した.

単位鉛直インクレメントあたりの南北熱フラックスは $a \cos \varphi s v^r = a^2 s v^{*r}$ と表される.

³⁾ TEM 方程式については 3 章に詳しくまとめた.

ただし、 a は惑星半径であり、 s は単位質量当たりの静的エネルギーである。 s は比エンタルピー h とジオポテンシャル Φ より

$$s = h + \Phi \quad (2.5)$$

と書ける。そして、 $h' \equiv h - h(z = 0\text{km})$ を計算するために、VIRA における p および T プロファイルの積分経路に沿った積分 $\int \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \int \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp$ を実行した。このときに、 $\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = c_p$ と以下の式

$$\Gamma = \frac{g}{c_p} \left[1 - \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \right] \quad (2.6)$$

を使用した。この式は VIRA において Γ を計算する際にも用いられた。ここで注意しなければならないのは、実際には Γ のデータは 72km までしか利用できないことだ。それより上空では、 $\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T$ は理想気体と同じように 0 とした。これは 70km 以上の比較的高い圧力が低い場所では妥当なものである。この計算結果が以下である。

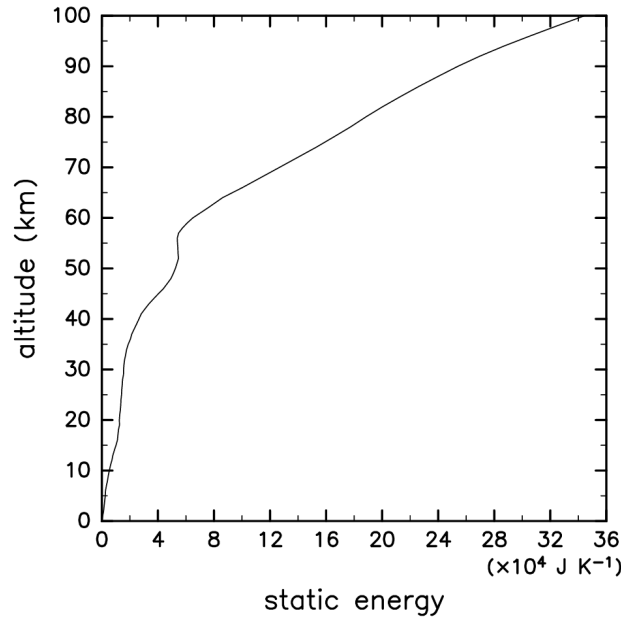


図 6: 静的エネルギーの鉛直分布。 これは VIRA のデータ [11] から得られており、地表面での値との差 $s' \equiv s - s(z = 0\text{km})$ で表されている。このプロファイルは子午面熱輸送の計算に用いられている⁴⁾。縦軸は高度で、横軸は静的エネルギーである。

⁴⁾ 子午面熱輸送に関しては Horinouchi et al. (2020) の Supplementary Materials の S13 節に示されている。

さらに、南北循環の伴う東西加速の概算のために、観測結果 [4, 6, 8, 11] を考慮して、40 から 90km の間で理想化された東西風の南北構造を定義した。その南北構造は、選択された高度 $z_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ において解析的に次のように指定される。

$$u = -u_{0i} \left[1 + a_i \tanh \frac{\varphi - a_{ci}}{a_{wi}} + b_i e^{-\left(\frac{\varphi - b_{ci}}{b_{wi}}\right)^2} \right] \cos \varphi \quad (2.7)$$

ここで、 $z_i = 40, 53, 63, 73, 90\text{km}$, $u_{0i} = 50, 70, 90, 110, 40\text{ms}^{-1}$, $a_i = 0.6, 0.6, 0.3, 0.25, 0.15$, $a_{wi} = 30^\circ, 30^\circ, 25^\circ, 20^\circ, 20^\circ$, $a_{ci} = 60^\circ, 60^\circ, 50^\circ, 38^\circ, 35^\circ$, $b_i = 0.3, 0.3, 0.25, 0.2, 0.1$, $b_{wi} = 25^\circ, 25^\circ, 25^\circ, 15^\circ, 15^\circ$, および $b_{ci} = 70^\circ, 70^\circ, 55^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ である。この結果に対して 3 次スプライン補間を行い鉛直方向に補間した。このようにして得られた理想化した東西風に対応する角運動量は図 5C に示されている。 u が最大になるのは雲頂からわずかに高い $\sim 73\text{km}$ ほどであることに注意されたい。これは、283nm 画像から得られた平均風速が 365nm 画像から得られたものよりも速いこと [4] に基づいている。

2.4 あかつきのデータの解析手法

ここでは、Horinouchi et al. (2020) で行われた解析手法についてまとめる。Horinouchi et al. (2020) では金星探査機のあかつきから得られた 2015/12 から 2018/12 までのデータを大きく 5 つに分けている。それぞれ開始日が 2015/12/07, 2016/09/21, 2017/04/21, 2017/12/01, 2018/06/16 で、その終了日は 2018/12/07 である (第 1-5 期間と呼ぶこととする)。

2.4.1 あかつきのデータからの風推定

あかつきの UVI から得られた紫外輝度のデータを用いて雲の追跡を行い、それらの画像より雲頂付近の水平方向の風速を得る。このときに用いたのは、あかつきのため導出された雲追跡法 [3, 7] を用いる。パラメータは先行研究 [4] と同じとした。この方法を用いると $3^\circ \times 3^\circ$ 格子上の風データが得られる。求まる風ベクトルは $\sim 10^\circ \times 10^\circ$ 領域上での雲の動きを表すため、オーバーサンプリングとなっている⁵⁾。風の擾乱である u', v' を導出するための風データでは 3×3 格子点で平滑化を行っているため、使用された風データはわずかに広い領域の水平風を表すこととなる。

⁵⁾ オーバーサンプリングをすることで、SNR を向上させることができる。

2.4.2 風推定誤差の評価

Horinouchi et al. (2020) では、雲追跡によって得られる風速場の誤差の推定と評価を行っている。風推定誤差の評価には、 $\Delta u \equiv u'(\tau_L + \Delta\tau_L, \varphi + \Delta\varphi, t + \Delta t) - u'(\tau_L, \varphi, t)$ と $\Delta v \equiv v'(\tau_L + \Delta\tau_L, \varphi + \Delta\varphi, t + \Delta t) - v'(\tau_L, \varphi, t)$ を用いる。ここで、 $\Delta\tau_L$ および $\Delta\varphi$ は、 Δt の間の $[u(\tau_L, \varphi, t), v(\tau_L, \varphi, t)]$ (背景風を含む全風速) による移流に対応する地方時 (LT, 経度に関連) および緯度の増分である。 φ の各格子点について τ_L と t にわたるアンサンブル平均を $E((\Delta u)^2)$ とし、 Δv から同様に定義されるものを $E((\Delta v)^2)$ とする。また、 t と $t + \Delta t$ での誤差が無相関で、シグナルとノイズも無相関とする。すると、 $E((\Delta u)^2)$ の期待値は $2\sigma_{\epsilon u}^2 + 2(1 - r_{u'}(\Delta t))\sigma_{u'}^2$ となる。ただし、 $\sigma_{\epsilon u}^2$ は東西風推定における誤差の分散、 $\sigma_{u'}^2$ は u' の真の (物理的) 分散、 $r_{u'}(\Delta t)$ は移流に沿った Δt の時間差における自己相関である。 Δu と Δv の標準偏差 $\sigma_{\Delta u} \equiv \sqrt{\frac{E((\Delta u)^2)}{2}}$, $\sigma_{\Delta v} \equiv \sqrt{\frac{E((\Delta v)^2)}{2}}$ は、 $\sigma_{u'}^2, \sigma_{v'}^2$ が十分に小さいか、 Δt が十分に小さく $r_{u'}$ が 1 に近づけば、 $\sigma_{\Delta u} \sim \sigma_{\epsilon u}, \sigma_{\Delta v} \sim \sigma_{\epsilon v}$ となる。

日平均時間依存風擾乱 $u^\#, v^\#$ の不確かさの評価は以下のように行う。これらの日平均風は 3 つ以上の u' (または v') の値を用いることができるときに定義される。平均化に使用される典型的な数は 5 であるため、誤差分散は約 $1/5$ になると考えられる⁶⁾。そのため、 $u^\#, v^\#$ の不確かさはそれぞれ $\sigma_{\epsilon u}, \sigma_{\epsilon v}$ の約 $1/\sqrt{5}$ 倍とみなすことができる。

2.4.3 u' と v' の誤差共分散の推定

UV 輝度の特徴として、北半球 (南半球) では北西-南東 (南西-北東) 方向に斜め向きになる傾向がある。これは図 1 にも表れていて、左に倒れた V 字の線が見える。雲追跡の前にハイパスフィルタが適用されるが [4]、全体的な斜めの特徴は、北半球において南西-北東方向よりも北西-南東方向により大きな曖昧さを生じさせる。これにより、 u' と v' の誤差に負の共分散が生じる。そのため、共分散を引くことで、AM フラックスからその影響を差し引く。

2.4.2 節と同じように、 t と $t + \Delta t$ での誤差が無相関で、シグナルとノイズも無相関とす

⁶⁾ あかつきの観測が 10, 12, 14, ..., 22 時に行われた場合、10-12-14, 12-14-16, ..., 18-20-22 の 5 パターンのデータが得られることが関係していると考えられる。

誤差分散が $1/5$ になるのは定性的にはわかるものの、実際にそうなるかまでは分かっていない。

ると、 $\frac{1}{2}E(\Delta u \Delta v)$ の期待値は $2C(\epsilon_u, \epsilon_v) + 2C(u', v') - C(u', v'; \Delta t) - C(u', v'; -\Delta t) \simeq 2C(\epsilon_u, \epsilon_v) - C\left(u', \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}\right) \Delta t^2$ となる．ここで $C(x, y)$ はタイムラグなしの x と y の共分散であり、 $C(x, y; \Delta t)$ はタイムラグ Δt での x と y の共分散である．最後の導出はテイラー展開によるものである（最後の項は $-C\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}, v'\right) \Delta t^2$ とも書ける）． $\Delta t = 4$ 時間における $\frac{1}{2}E(\Delta u \Delta v)$ を誤差共分散の推定値とみなす．この共分散は各期間について得ることができ、図 12B の実線を描くために平均 $u'v'$ から差し引く．

前節の議論に従い、 $u^\#$ と $v^\#$ 間の誤差共分散は u' と v' 間の誤差共分散の $1/5$ であると想定されたため、 $\frac{1}{2}E(u^\# v^\#)$ は $\Delta t = 4$ 時間における $\frac{1}{10}E(\Delta u \Delta v)$ に設定された．

2.4.4 潮汐角運動量フラックスの推定

観測から得られた時間平均風 $(\bar{u}, \bar{v})$ は東西時間平均風 (u_0, v_0) と熱潮汐に関連付けられた流れ (u_t, v_t) からなる $[(\bar{u}, \bar{v}) = (u_0 + u_t, v_0 + v_t)]$ ．そのため、 (u_0, v_0) の推定が (u_t, v_t) を考えるうえで重要となる． v_t に関しては $v_0 = 0$ としたときと $v_0 \sim 1\text{ms}^{-1}$ のときで $-\langle u_t v_t \rangle \cos \varphi$ にわずかしき違いはなかったものの、 u_0 の制約に関しては入念な推定が必要となる．

まずは、先験的知識を以て制約を考える．昼側と夜側の両方における、熱赤外を用いた雲頂温度の観測的研究 [9, 16] で、熱潮汐に関する温度変動が緯度 $\sim 40^\circ$ 以南 (以北) において帯状波数 2 (1) 成分の振幅が最も大きいことが示された．これは、最近のモデリング研究でも同様である [15]．このモデリング研究は他にも、内部重力波における運動エネルギーと位置エネルギーの理論的な等分配から予想されるように、東西波数 1 成分と波数 2 成分の比が温度と東西風の間で類似していることも示した．これらの研究から、温度だけでなく潮汐に関連する東西風擾乱も同様に、緯度 30° より低い場所では東西波数 2 成分が卓越していると考えられることができる．そしてそこでは、波数 1 成分の振幅は波数 2 成分の 3 分の 1 にも満たない [9]．したがって、緯度 30° 以南では、昼面に限定された雲追跡の観測から運動量フラックスを妥当な精度で推定できると思われる．

ここでは、様々な緯度における $\bar{u}$ に対して帯状波数 2 の波を最小二乗法でフィッティングし、 $\bar{u}(\tau_L, \varphi)$ の振動の中心の値を u_0 と考える⁷⁾．

⁷⁾ 熱潮汐波を含む様々な波については 4 章に詳しくまとめた．

2.4.5 スペクトル解析

第 2-5 期間それぞれで日平均擾乱風 $u^\#$, $v^\#$ の時間 t に関する周波数スペクトル計算を高速フーリエ変換 (FFT) を用いた離散フーリエ変換 (DFT) と Lomb-Scargle 法で行っていて、その結果同様の周波数スペクトルが得られている。実際の解析では DFT のデータを用いた。

日平均風のタイムスタンプは観測時刻の平均に基づくため、一定間隔ではなくなっている。元データは周波数スペクトル計算をする前に、経度方向に 3 グリッド分と緯度方向に 2 グリッド分でビニングしている⁸⁾。Lomb-Scargle 法ではそのままのデータを用いたが、DFT では時間サンプリングが一定でないといけなくかつデータ欠損も許されない。そのため、2 日までのデータ欠損は補間していて、さらに 45 日以上の時系列のデータが得られた場合のみに実施された。DFT に関しては各期間の間に 90 日の時間窓を用いていて、連続する時系列の後にはゼロパディングをしている⁹⁾。周波数は Lomb-Scargle 法と DFT の両方で $1/90 \text{ day}^{-1}$ で計算されている。

ある量 x の複素フーリエ係数を $X(\tau_L, \varphi, f)$ としたとき (f は周波数), x のパワースペクトルは単純な $cX(\tau_L, \varphi, f)X^*(\tau_L, \varphi, f)$ ではなく、これを τ_L で平均しさらにある φ について各期間にわたってアンサンブル平均をとったものになる。ただし、 c は f についてナイキスト周波数まで積分したものが分散に等しくするために係数であり、アスタリスクは複素共役を表す。そのため、 $x(\tau_L, \varphi, t)$ と $y(\tau_L, \varphi, t)$ のクロススペクトルも同様に平均操作をした $cX(\tau_L, \varphi, f)Y^*(\tau_L, \varphi, f)$ であり、このクロススペクトルの実部と虚部がそれぞれ共スペクトル (コスペクトル) と直交スペクトルである¹⁰⁾。

⁸⁾ グリッド間隔は $3^\circ \times 3^\circ$ である。

ビニングとは、いくつかのグリッド点をまとめることである。つまり、値は平均値や中央値にしてグリッド数を減らすということである (まるでモザイク処理のようである)。

⁹⁾ 時間窓とはデータをカットして空白期間を作ることであり、ゼロパディングとはデータを 0 で埋めることである。

¹⁰⁾ 共スペクトルが正でかつ大きいならば、ある周波数において二つの量の位相が近いとなる。逆に直交スペクトルが大きいなら位相が $\pi/2$ ほどずれていると分かる。

2.4.6 潮汐熱フラックスの推定

潮汐熱フラックスの推定には 2.4.4 節での v_t とあかつきに搭載された LIR によって取得された雲頂輝度温度データを用いた。LIR によるデータの中で、衛星天頂角が小さいものは UVI が感度を持つ雲頂よりも 4km ほど低い部分が代表高度となる。ただし、衛星天頂角が大きくなると代表高度も高くなる。実際に、衛星天頂角が 0° のときと 70° のときとでは、平均的な LIR 輝度温度が 12K ほど変わっている。ここで、平均気温を導出する前に天頂角に対する全体的な温度依存性は補正されている。そのため、衛星天頂角が $50\text{--}80^\circ$ の間に観測されたデータを用いて、潮汐温度場 T_t を導出している。

2.5 結果

2.5.1 熱的に誘起された子午面循環と理想的な東西風分布のモデルの結果

図 5A より、高度 60-70km で大きな吸収があることが分かる。それ以外の高度では吸収量にあまり差がみられなかった。図 5B を見ると、高度 60, 30, 5km 付近で極大値があり、高度方向に 3 つの循環があると分かる。図 5C より、(B) でも言及した通り、高度方向に 3 つの循環がみられる。また、高度 60-70km では赤道付近では残差循環による $0.4\text{ms}^{-1}\text{day}^{-1}$ ほどの負の減速がみられ、高緯度側になると残差循環による $0.7\text{ms}^{-1}\text{day}^{-1}$ ほどの負の加速が起きていると分かる。また、高度 $\sim 70\text{km}$ より上では残差循環による負の加速が、高度 $\sim 60\text{km}$ より下では残差循環による負の減速が起きている。図 5D を見ると、南北風が速い $\varphi_{\max}$ 付近の緯度では 70km で極大値の 2ms^{-1} の、鉛直風が速い赤道付近の緯度では 68km で極大値の 2mms^{-1} の速さとなっていた。

2.5.2 あかつきのデータからの風推定の結果

雲追跡データの品質管理は先行研究 [4] と同様であるが、中緯度においてより多くのベクトルを得るために、パラメータの一つである ϵ （その研究における精度の尺度）の閾値を $< 10\text{ms}^{-1}$ から $< 20\text{ms}^{-1}$ に緩めた。3 年間の解析期間において、365nm での 3,789 組の画像の三つ組から雲頂風が得られた。 ϵ の閾値を 20ms^{-1} に設定した場合において、品

質管理を通過した風ベクトルの数は 140 万を超える。また、283nm では 3,793 組の画像の三つ組が使用され、120 万の風ベクトルが得られた。各緯度格子における検証済みベクトルの数を 365nm のケースについて図 7A の赤線に示す。283nm のケースのプロファイルも同様である。

図 7A の赤線より、赤道域に近づくほどデータ量が多く、中緯度の近づくデータ量は減っていった。また黒実線と黒破線より、赤道域の方が中緯度帯よりも標準偏差が小さく u と v では u の方が標準偏差が大きいと分かる。図 7B の黒線より、緯度 40° よりも赤道側では平均東西風の速さがあまり変わらなかった。また破線も同様に、緯度 40° よりも赤道側では平均東西風の速さがあまり変わらなかったが、赤道での速度の低下は大きかった。そして赤線より、絶対渦度の鉛直成分はほぼ赤道反対称な形をしており、その変化の傾きは緯度 30° 付近で大きくなっている。さらに青線より、単位質量当たりの角運動量は赤道で極小を迎え、緯度とともに上昇する傾向がみられる。図 7C より、平均東西風分布は赤道対称に近く、朝と夕方ですく昼頃との差は $10 \sim 20 \text{ms}^{-1}$ 程になると分かる。また、赤道域よりも緯度 $20\text{-}40^\circ$ のほうがわずかに速いという結果であった。図 7D より、平均東西風分布は赤道反対称に近く、風が速い部分は正午より 1 時間ほど遅いところにその中心を持っていた。また、こちらも風の速さは赤道にいくほど遅いのに対して、基本的に高緯度ほど速いと分かる。

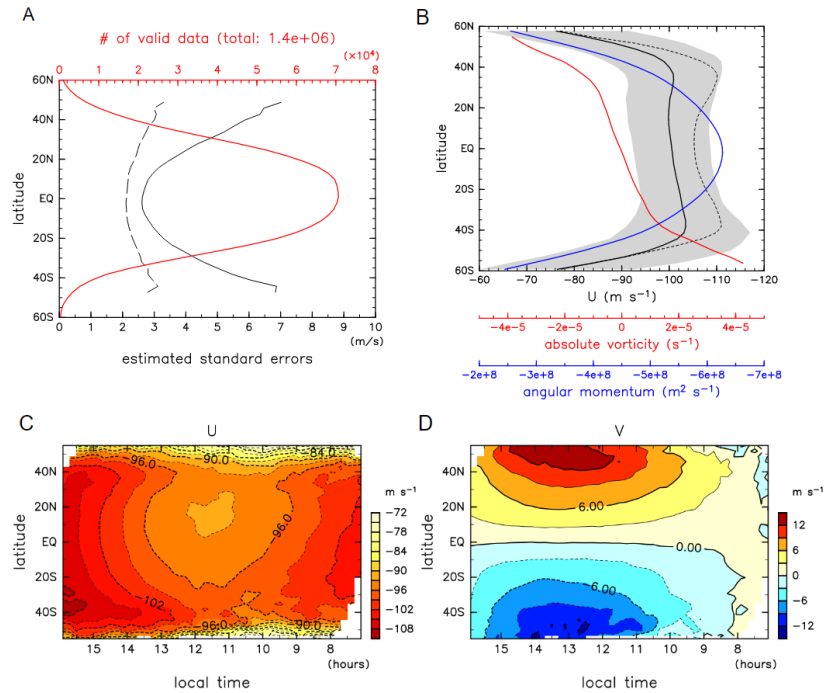


図 7: あかつきによって撮られた紫外画像から得られた雲頂における水平風の基本的な統計値 (特に記載がなければ 365nm の画像からの結果が示されている). (A) 3° の各緯度グリッドごとの風ベクトルの数 (赤線) と, 3×3 の移動タイル平均後の風の誤差の推定された標準偏差. 東西風が黒実線, 南北風が黒破線. 縦軸は緯度であり, 上の横軸は品質管理を通過したデータの数, 下の横軸は推定された標準偏差である. (B) 全期間および地方時 8-9.5 時と 14-15.5 時で平均することによって得られた平均東西風 (黒実線). 影領域は 21 日移動平均 (50 % 以上のデータが必要) を施しその後ある地方時の範囲で平均した東西風の標準偏差として得られた, 低周波数変動を足し引きしたものである. そして, 青線は平均東西風から得られた単位質量当たりの角運動量で赤線は絶対渦度の鉛直成分である. また, 点線は 283nm のものである. 縦軸は緯度であり, 黒横軸は平均東西風速, 赤横軸は絶対渦度, 青横軸は単位質量当たりの角運動量である. (C) 観測期間にわたって平均された東西風の地方時一緯度分布 (ms^{-1}). 縦軸は緯度で, 横軸は地方時である. (D) (C) と同様だが, こちらは南北風についてである. 縦軸は緯度で, 横軸は地方時である.

2.5.3 風推定誤差の評価の結果

図 8 は、 $\Delta t = 4, 8$ 時間の場合の $\sigma_{\Delta u}$ と $\sigma_{\Delta v}$ である。図 8 の左側では主に緯度 40° より赤道側が示されているが、365nm のものの実線と破線を比べると、赤道ほどその差は小さく中緯度ではその差が大きくなると分かる。ただ、中緯度でもその差は 1.5ms^{-1} とそもその風速と比べて小さかった。また、その傾向は 283nm のものでも見られる。図 8 の右側では主に緯度 40° より赤道側が示されているが、 u のときと同様に 365nm のものの実線と破線を比べると、赤道ほどその差は小さく中緯度ではその差が大きくなると分かる。ただ、中緯度のその差は 0.5ms^{-1} と u のときと比べて小さく、中緯度帯でもそもその風速と比べて小さかった。また、その傾向は 283nm のものでも見られるのも u と同様である。

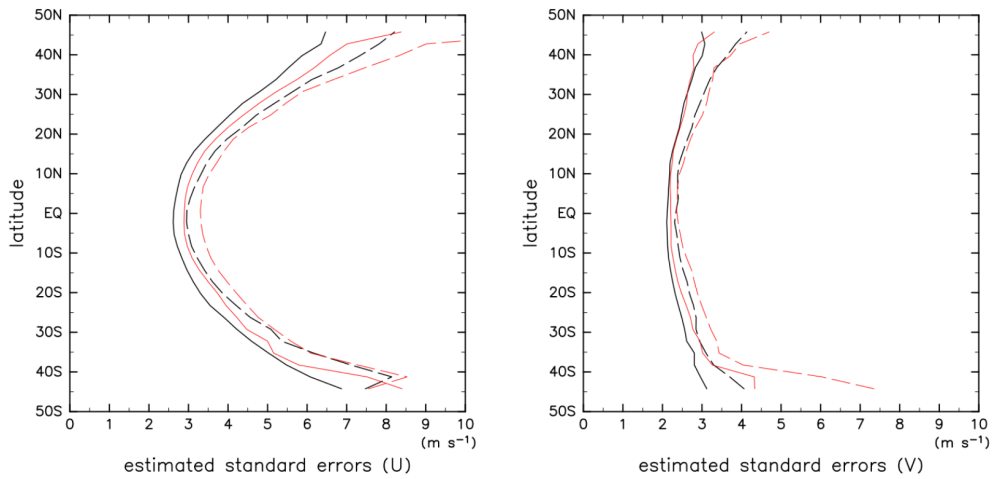


図 8: 2.4.2 節で定義されたラグランジュ的風の差に基づく統計値。左： $\Delta t = 4$ (実線) および $\Delta t = 8$ (破線) における $\sigma_{\Delta u}$ 。縦軸は緯度で、横軸は推定された u' の標準偏差である。右：左と同様だが、こちらは $\sigma_{\Delta v}$ について。縦軸は緯度で、横軸は推定された v' の標準偏差である。(黒：365nm, 赤：283nm) $\Delta t = 4$ における $\sigma_{\Delta u}$ と $\sigma_{\Delta v}$ は、図 7A に示される推定標準誤差に用いられている。

2.5.4 u' と v' の誤差共分散の推定の結果

図 9 も図 8 と同様に主に緯度 40° より赤道側が示されているが、共分散は赤道反対称となっていた。また、365nm のものの実線と破線を比べると、赤道ほど差が小さく、中緯度にいくほどその差は大きくなった。値としては緯度 40° あたりで $5\text{m}^2\text{s}^{-2}$ ほどとなり、その差は小さいことが分かる。また、その傾向が 283nm でも見られる。

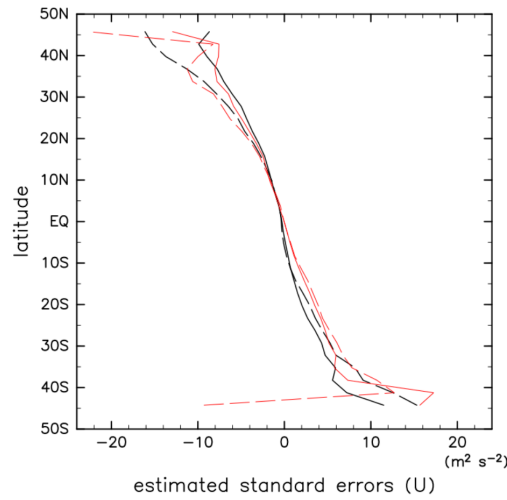


図 9: 誤差共分散の推定. 365nm (黒) および 283nm (赤) 画像から得られた風に対する、 $\Delta t = 4$ 時間 (実線) および 8 時間 (破線) における、2.4.3 節で定義されたラグランジュ的風の差の共分散の半分 $\frac{1}{2}E(\Delta u \Delta v)$. 縦軸は緯度で、横軸は推定された u' と v' の共分散の半分の値である。 $\Delta t = 4$ 時間における値は、図 12B に示される角運動量 (AM) フラックスを導出するために、 u' と v' の間の推定誤差共分散として用いられている。

2.5.5 潮汐角運動量フラックスの推定の結果

図 10, 11 は 3 年間にわたる雲追跡風から得られた様々な緯度における $\bar{u}$ を示していて、図 12 はその得られた結果を用いた結果である。図 10 の (A)-(H) のフィッティングを見ると、(A) や (H) では高周波数成分が少し見られるもの、全てでおおむねよく東西波数 2 の波をフィッティング出来ているといえる。また、 $\bar{u}$ の最大値と最小値の平均を u_0 としたとしても、フィッティングで得られた u_0 の ± 0.3 倍の範囲に入っていた。そして、赤線

と青線が比較的離れているものは高周波数成分が大きくみられるものであった。図 10 の (I) を見ると、赤線と青線の差が大きいのは中緯度であり、その差は大きくても数 m^2s^{-2} 程度であった。図 11 の (A)-(H) のフィッティングを見ると、(A) や (H) では高周波数成分が少し見られるもの、ほぼ全てでおおむねよく東西波数 2 の波をフィッティング出来ているといえる。(A) に関しては他よりも大きなずれがみられた。また、 $\bar{u}$ の最大値と最小値の平均を u_0 としたとしても、フィッティングで得られた u_0 の ± 0.3 倍の範囲に入っていた。ただ、赤線と青線が比較的離れているものが図 10 よりも多く、それは高周波数成分があまり見られないものでもあった。図 11 の (I) を見ると、赤線と青線の差が図 10 と比べて大きい。その差は緯度 30° で $10\text{m}^2\text{s}^{-2}$ 程度であった。図 12A より、南緯 25° から北緯 25° にかけてフラックスの傾きが正になっているのに対して、それより極側では傾きが負になっている。また、 283nm での結果は 365nm のものよりも絶対値が大きくなっている。図 12B を見ると、南緯 40° から北緯 40° にかけてフラックスの傾きが正になっていて、この傾向は南側では乱れがみられるもののおおむね図 12B の全範囲で見られた。また、 283nm においては実線と点線を比較したときに、中緯度帯では点線の方が $4\text{m}^2\text{s}^{-2}$ ほど大きかった。図 12C は図 12A, B の微分結果にマイナスをかけたものになっているが、緯度が増加したときにフラックスも増す場合には微分結果にマイナスをかけたものが負になり、結果的に負の角運動量の増加となる。しかし、緯度が増加したときにフラックスは減る場合には微分結果にマイナスをかけたものが正になり、結果的に負の角運動量の減少となる。そのため、平均潮汐フラックスから得られた発散では赤道付近で負の角運動量の増加を示しており、南緯 25° から北緯 25° より極側の潮汐フラックスや乱流による効果は負の角運動量の減少に寄与している。 283nm (365nm) から得られた平均潮汐フラックスは赤道において -0.9 (-0.6) $\text{ms}^{-1}\text{day}^{-1}$ 程の加速を起こしており、乱流は逆にどちらの波長でも $0.15\text{ms}^{-1}\text{day}^{-1}$ の負の減速を起こしている。また、ロスビー波による影響は $0.1\text{ms}^{-1}\text{day}^{-1}$ にも満たなかった

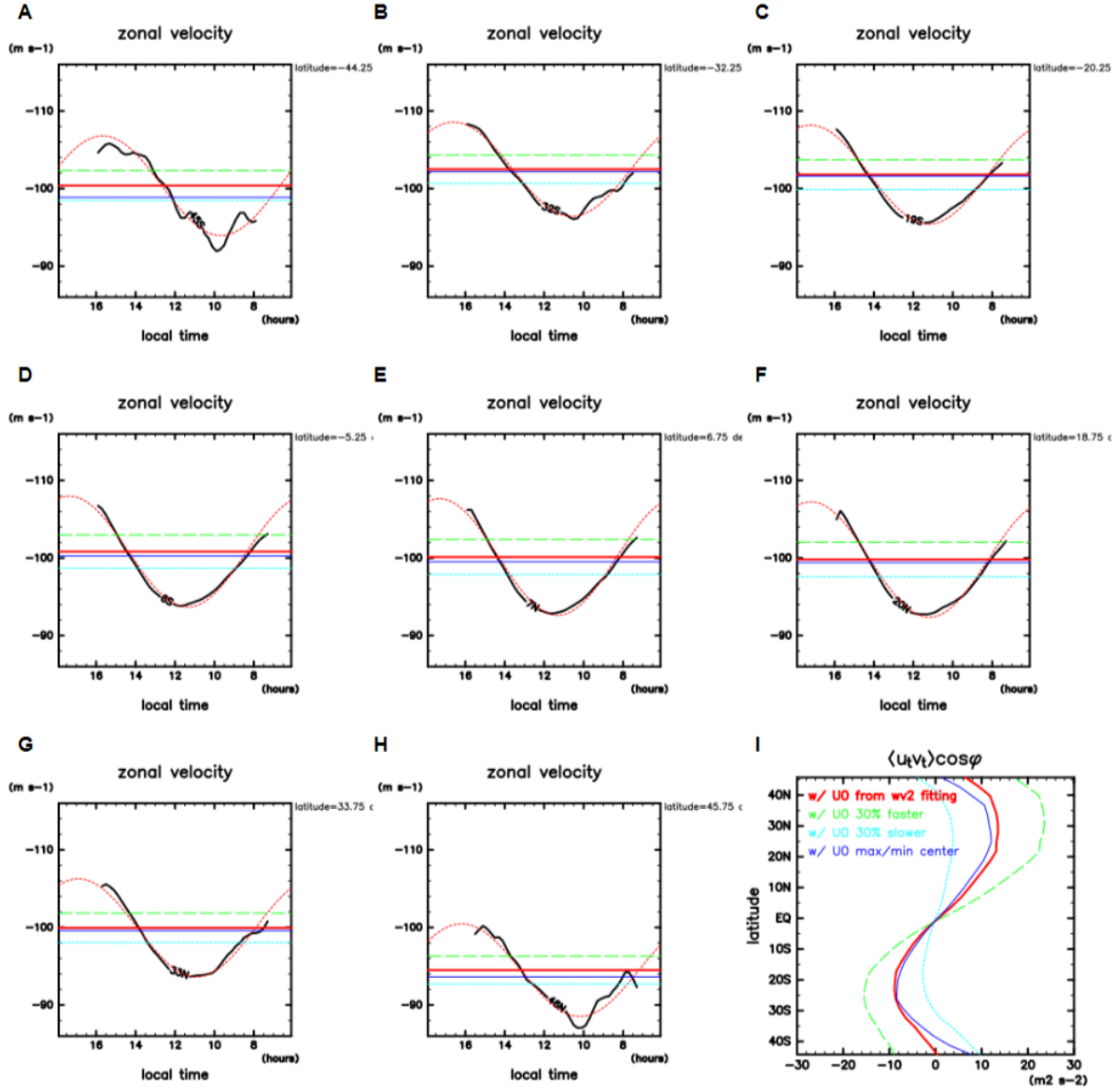


図 10: u_0 の過程に対する潮汐角運動量フラックスの依存性を感度実験の図解. (A)-(H) 右上隅に示された緯度における, 3 年間の期間から得られた平均東西風 $\bar{u}$ (黒線). 赤線は, 東西波数 2 の正弦波曲線の最小二乗フィッティングによって得られた u_0 を示す. 縦軸は平均東西風速で, 横軸は地方時である. (I) この仮定で得られた $\langle u_t v_t \rangle \cos \varphi$ (赤線) であり, これは図 12A の細実線と同じである. 縦軸は緯度で, 横軸は $\langle u_t v_t \rangle \cos \varphi$ の値である. (A)-(I) 全てに共通するものとして, 緑とシアン色の線 (A-H) および曲線 (I) は, このように定義された u_0 をフィッティングに基づく潮汐振幅の ± 0.3 倍だけずらした場合である (緑: 速い方, シアン: 遅い方). また, 青線 (A)-(H) と曲線 (I) は $\bar{u}$ の最大値と最小値の平均を u_0 と定義した場合である.

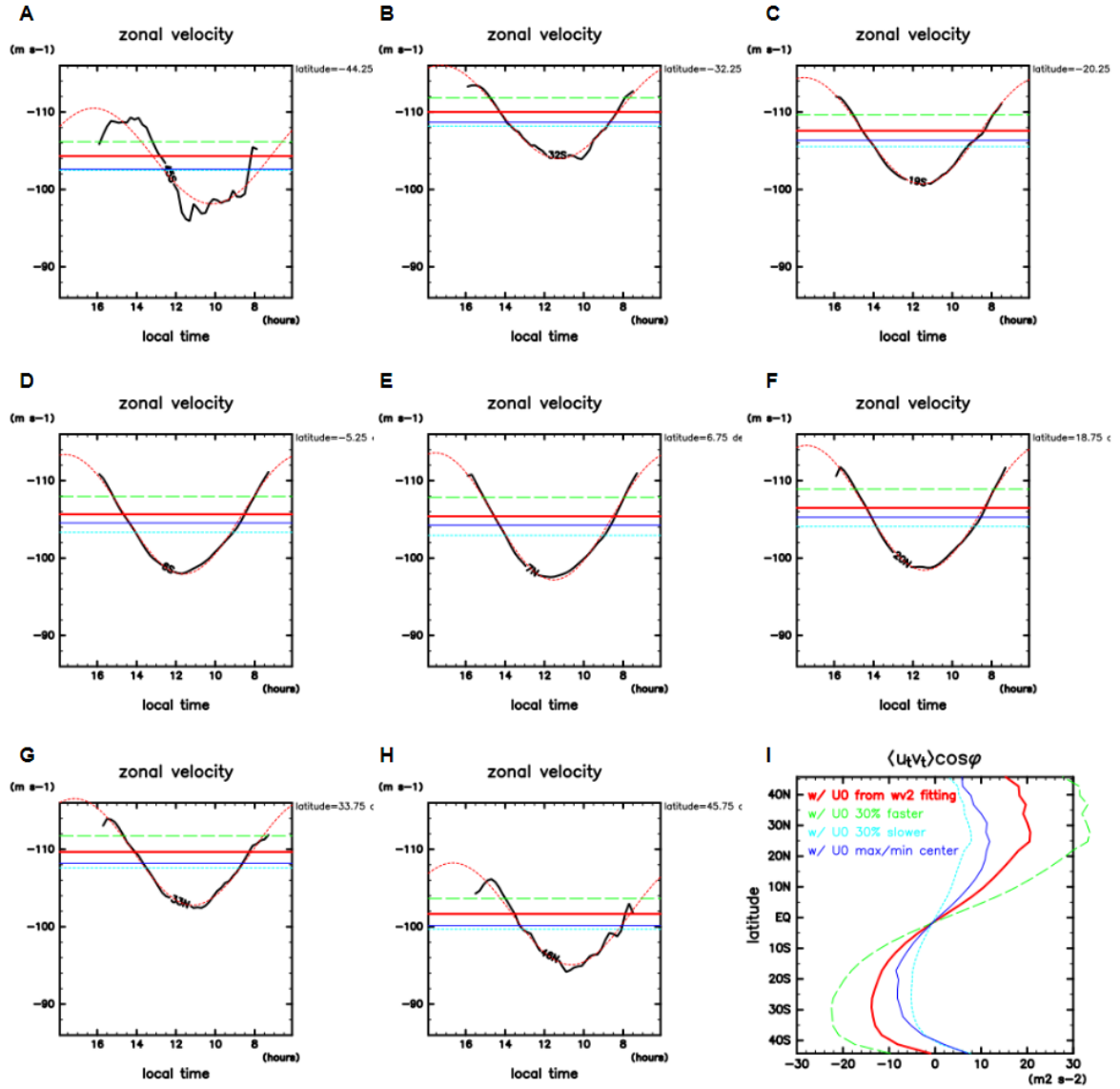


図 11: 図 10 と同様だが、こちらは 283nm に対するもの。

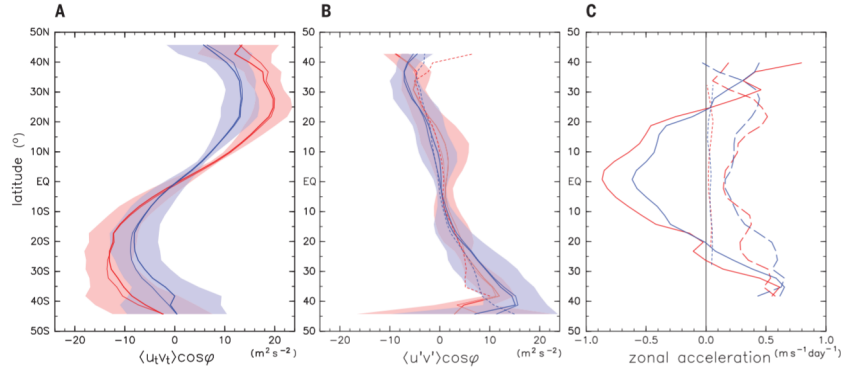


図 12: 雲頂での熱潮汐波と時間変化する乱流による子午面 AM フラックスとその発散.

(A) 2~5 番目の期間で $\langle u_t v_t \rangle \cos \varphi$ を平均することで得られた平均潮汐フラックス (太線: 赤は 283 nm の場合; 青は 365 nm の場合を示す). 1 番目の期間が除かれているのは, 地方時の範囲が u_0 を推定するには短すぎるためである. 影領域は各期間における標準偏差を示す. 細実線は期間全体の結果を示す. (B) (A) と同様だが, 5 つの期間から得られた $\overline{\langle u' v' \rangle \cos \varphi}$. u' と v' の間の誤差共分散に起因する偏りは取り除かれている. 点線は, 日平均風 ($u^\#, v^\#$) から得られたフラックスである. (C) (A) と (B) における, 熱潮汐波の加速量 ($-\frac{\partial \langle u_t v_t \rangle \cos^2 \varphi}{a \cos^2 \varphi \partial \varphi}$; 実線) と時間変化する乱流 ($-\frac{\partial \langle u' v' \rangle \cos^2 \varphi}{a \cos^2 \varphi \partial \varphi}$; 破線) の子午面 AM フラックス収束による帯状加速量. 点線は緯度方向に 1:2:1 の平滑化を行った後の共スペクトルから得られたロスビー波の加速量である. 色は (A) と同様である.

2.5.6 スペクトル解析の結果

図 13A より, $u^\#$ が緯度方向に正の部分と負の部分が一度ずつ表れていて, 大きく一つの波になっていることが分かる. また, 南北で絶対渦度の正負が入れ替わっており, 中緯度にいくほどその絶対値も大きくなっている. 図 13B より, $u^\#$ の周波数成分として 0.2 day^{-1} が強く出ていて, 次点で 0.25 day^{-1} の成分が卓越していると分かる. また, これは赤道対称である. 図 13C より, 図 13B と同様に 0.2 day^{-1} が強く出ていて, 次点で 0.25 day^{-1} の成分が卓越していると分かる. 違う点としては, 北半球と南半球では v が向きを変えるため, 赤道反対称になっている. 図 14A を見ると, Lomb-Scargle 法と DFT で出てきたスペクトルに大きな差はなかった. ピークではないところでは全体的に DFT が小さいが, ピークの部分ではかなり差が小さかった. 図 14B より, $v^\#$ の周波数成分として 0.2 day^{-1} が強く出ていて, 次点で 0.1 day^{-1} の成分が卓越していると分かる. ま

た、これはスペクトルが出る部分は赤道対称であるのに対して、 0.3day^{-1} のピークは南半球の方が強く出ている。図 14C より分かることとして、 0.2day^{-1} の部分が強く出ている、つまり、 $u^\#$ と $v^\#$ の位相にずれがあることが分かる。また、それは 0.25day^{-1} でも同様であった。図 14D を見ると、コヒーレンシーが大きいのは 0.2day^{-1} の北半球においてである。次点としては 0.5day^{-1} においてである。南半球では $0.15, 0.2, 0.25\text{day}^{-1}$ で周りよりも少しコヒーレンシーが高い部分があった。

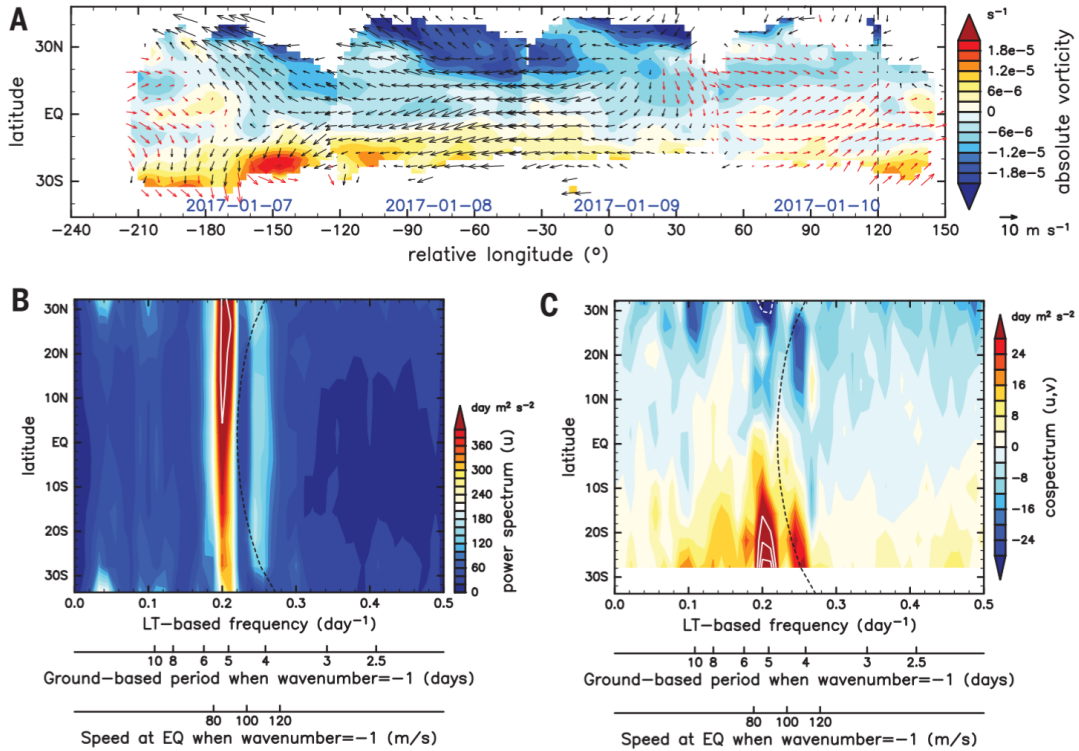


図 13: 風の擾乱場の例 (365nm) と対応するスペクトル. (A) 2017/01/07 から 01/10 までの期間での風の時間変動成分 ($u^\#, v^\#$) (矢印; $u^\# > 0$ ならば赤である) と絶対渦度 (色のトーン). 一日当たり 90 度ずつずらして重ねている. 縦軸は緯度で、横軸は相対緯度である. (B) 2~4 番目の期間で $u^\#$ のパワースペクトル (色のトーン; 白い等値線は $500\text{m}^2\text{s}^{-2}\text{day}$). 横軸には、ある地方時 (LT, τ_L : 対応する地面を基準とした時間. 単位は day) で観測された振動数と、乱流の帯状波数が 1 であり西方向に動くときの赤道 (EQ) での帯状伝播速度の両方が示されている. 縦軸は緯度である. (C) (B) と同様だが、 $u^\#$ と $v^\#$ の共スペクトルの場合である (白い等値線は $20\text{m}^2\text{s}^{-2}\text{day}$ 間隔である). 縦軸は緯度で、横軸は (B) と同じである.

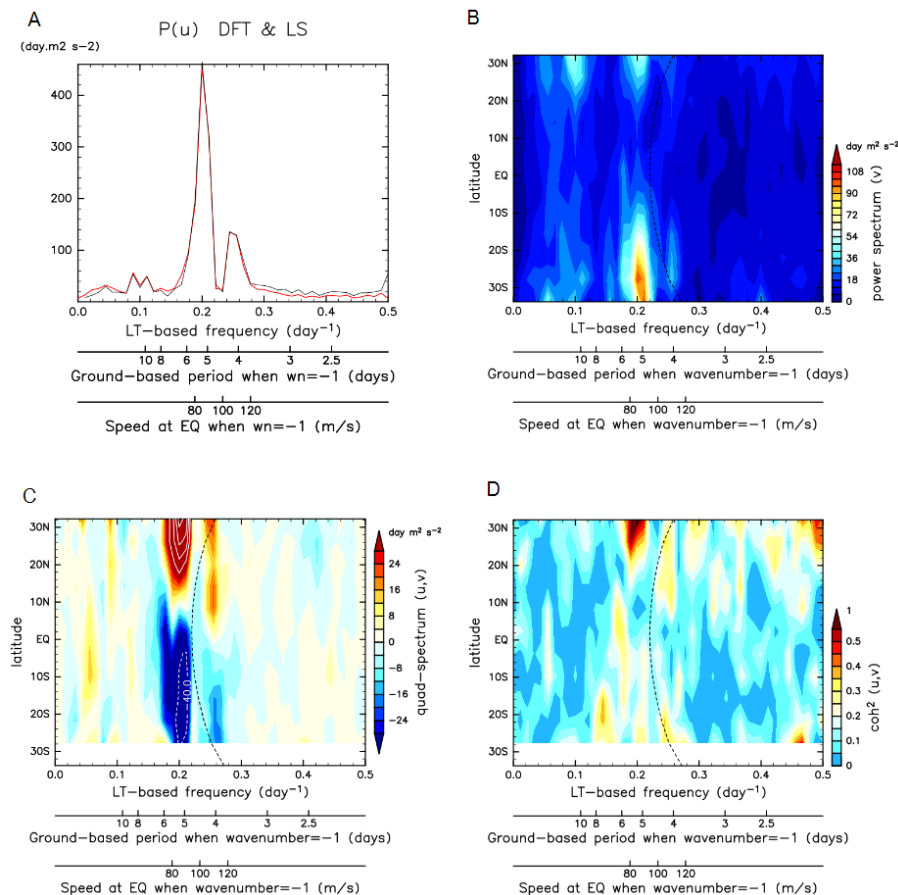


図 14: 365nm 画像での時間変化する日平均風擾乱のパワースペクトルとクロススペクトル. (A) 5°S から 5°N の間における $u^\#$ の Lomb-Scargle スペクトル (黒) と DFT (赤) スペクトルの比較. 縦軸はパワースペクトルで, 横軸は地方時に基づく周波数である. (B—D) 日平均 $u^\#$ および $v^\#$ の DFT による結果. 上横軸は地方時に基づく周波数で, 中央横軸は東西波数 1 のときの地面基準周期で, 下横軸は東西波数 1 のときの赤道での速度である. (B) $v^\#$ のパワースペクトル [$\text{m}^2\text{s}^{-2}\text{day}$]. 縦軸はパワースペクトルの強度である. (C) 図 13C と同様であるが, 直交スペクトル (クロススペクトルの虚部) について. 縦軸は直交スペクトルの大きさである. (D) $u^\#$ と $v^\#$ の間の 2 乗コヒーレンシー¹¹⁾. 縦軸はコヒーレンシーの 2 乗である.

¹¹⁾ 各周波数における相関を表す二乗コヒーレンシーは, クロススペクトルの絶対値の二乗と, x および y のパワースペクトルとの比である.

2.5.7 潮汐熱フラックスの推定の結果

図 15A より，緯度 50° を境に支配的な東西波数が変化している．赤道側では波数 2 の温度分布が形成されているのに対し，極側では波数 1 の温度分布が支配的になっている．図 15B を見ると，(A) の赤道域の温度分布がほとんど取り除かれて極側のもののみになっている．図 15C より，南北速度の速い点は 12 時よりも 1 時間ほど後にある．また，赤道域よりも極域側の方が速くなることが分かる．図 16D より， T_t が赤道対称なのに対して v_t が赤道反対称なので，結果的に $\langle v_t T_t \rangle$ の赤道反対称になっている．また，中緯度帯になると標準偏差の増加がみられた．図 16E より，波数 1 の z 方向フラックスは赤道において小さく，そこから極側にいくにつれて負のフラックスが徐々に大きくなった．この増加量は緯度 40° で大きくなった．

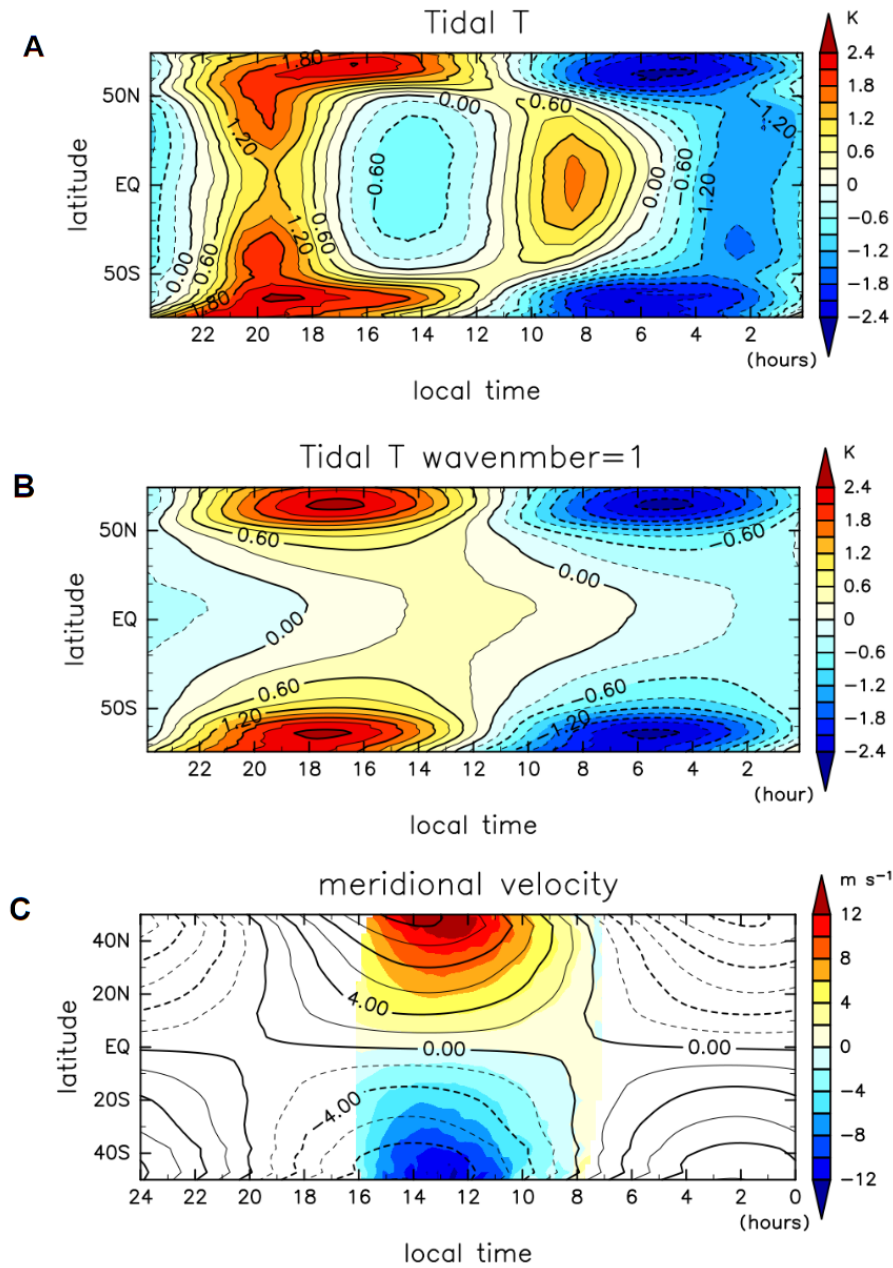


図 15: 潮汐温度と子午面風. (A) 3 年間の観測期間にわたって平均して得られた, 衛星天頂角が 50° から 80° の間であるときの LIR 観測から導出された輝度温度の潮汐成分 (帯状平均からの偏差として) T_t [K]. 縦軸は緯度で, 横軸の LT (地方時) は, 経度を反映するために (東が右に来るように) 減少順で示されている. (B) (A) の東西波数 1 成分. 縦軸は緯度で, 横軸は (A) と同じである. (C) 3 年間の観測期間にわたって平均された UVI 365 nm 画像から得られた平均南北風 $\bar{v}$ [m s⁻¹] (色のトーン), および $v_0 = 0$ を仮定した最小二乗フィッティングによって得られたその東西波数 1 成分 (等値線). 縦軸は緯度であり, 横軸は (A) と同じである.

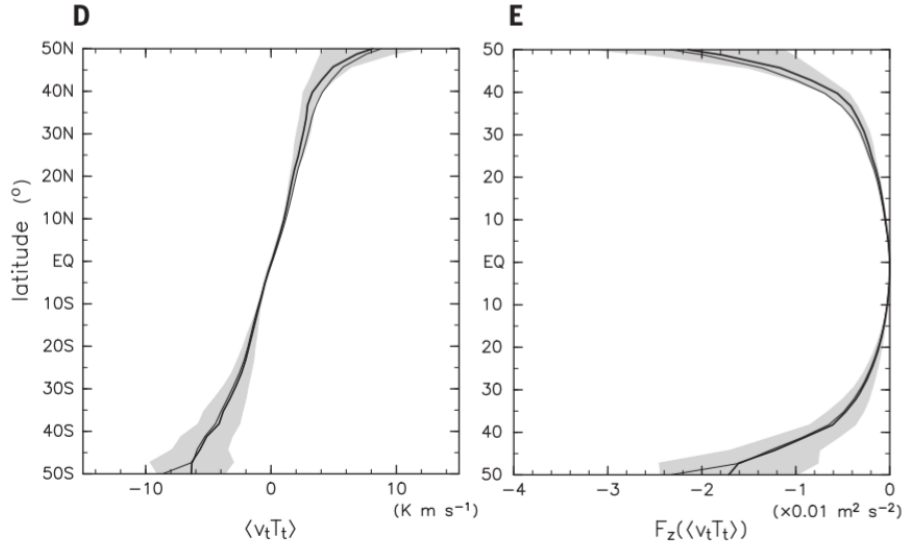


図 16: 潮汐熱フラックス. (D) 5 つの期間における, 365nm で得られた v_t を用いた $\langle v_t T_t \rangle_1$ から得られた昼側潮汐による平均潮汐熱フラックス (太実線¹²⁾). 影領域は各期間における標準偏差を示す. 細実線は期間全体から得られたものである. 縦軸は緯度で, 横軸はフラックス量である. また, 添え字の 1 は東西波数 1 の成分であることを示す. (E) (D) と同様だが, $f_{zT1} \equiv \zeta_a S^{-1} \langle v_t T_t \rangle_1 \cos \varphi$ の場合である (図 S3B の絶対渦度と安定性 $S = 8 \times 10^{-3} \text{Km}^{-1}$ を用いている). 縦軸は緯度で, 横軸はフラックス量である.

2.6 議論

2.6.1 風推定誤差の評価について

2.5.3 節の結果より, u についても v についても $\Delta t = 4, 8$ の差は小さいため, Δt が十分小さいとみて $\sigma_{\Delta u} \sim \sigma_{\epsilon u}, \sigma_{\Delta v} \sim \sigma_{\epsilon v}$ と見ることができる. そのため, 不確実性の推定に $\Delta t = 4$ 時間の $\sigma_{\Delta u}$ と $\sigma_{\Delta v}$ を用いることができると考えられる. そのため, 実際に $\Delta t = 4$ 時間での値が実際の計算に用いられている.

2.6.2 u' と v' の誤差共分散の推定について

2.5.4 節の結果より、 $\Delta t = 4, 8$ の推定標準偏差の差は小さいため、 Δt が十分小さいとみて $E(\Delta u \Delta v) \sim 2C(\epsilon_u, \epsilon_v)$ と見ることができる。そのため、不確実性の推定に $\Delta t = 4$ 時間の $\frac{1}{2}E(\Delta u \Delta v)$ を用いることができると考えられる。そのため、実際に $\Delta t = 4$ 時間での値が実際の計算に用いられている。

2.6.3 潮汐角運動量フラックスの推定について

2.5.5 節より、潮汐フラックスは 25° より赤道側では SR の加速に寄与しているのに対して、 2525° より極側では SR の減速に寄与している。これについては、熱潮汐波が東向き角運動量を赤道から持ち去る（西向き角運動量を赤道側に持って来る）ことによる中緯度域における SR の減速であると考えられる。また、これは作用反作用の法則とも矛盾しない結果である。

また、乱流による角運動量輸送に関しては、各期間の結果に一貫性があったため、この方法の確からしさが示されたといえる。そして、 $(u^\#, v^\#)$ から得られた角運動量フラックスが (u', v') から得られた角運動量フラックスよりわずかに小さいのは、日平均風の最高周波数である 0.5day^{-1} を下回る高周波成分や局所的な波が均されたことによる値の低下であると考えられる。

2.6.4 スペクトル解析について

2.5.6 節より、スペクトルの中でロスビー波 (0.2day^{-1})、ケルビン波 (0.25day^{-1}) に対応する波が強く出ている。それは共スペクトルでも直交スペクトルでも同様であり、潮汐構造を抜くとこれらの波が支配的であると考えられる。

各期間における自由度は、各周波数に対する τ_L に沿った自己相関に依存する。つまり、自己相関が強ければ一つの値が決められてしまえばそこから大まかな構造推定ができるのに対して、自己相関が低ければいくつかの値が決まらなると大まかな構造決定ができないからだ。特に、東西波数 1 の波に関しては、 τ_L のカバー範囲が限定的であるため、各時

刻における τ_L の自由度はほぼ 1 であるはずである¹³⁾[4]. しかし、各期間において τ_L のカバー範囲が徐々にシフトしている影響で、早い朝の τ_L かた遅い夕方の τ_L に被りがほとんどない [4]. よって、自己相関を考えられないため、自由度としては最低でも 2 になるはずである. これは第 2-5 期間全てに言えるので、スペクトルは 8 以上の自由度を持つとみなすことができる.

2.6.5 潮汐熱フラックスの推定について

LIR によって得られた雲頂付近の輝度温度は、必ずしも等圧面上の温度とは限らない. これは v_t についても同じことがいえるが、温度成層のため、温度の水平構造は潮汐風のものよりも高度サンプリングに対して敏感であると予想される. LIR 輝度温度の代表高度は、等圧面よりも等エントロピー面に近いように見えるかもしれない. しかし、線形波動理論によれば、背景の鉛直温度プロファイルが等温であるならば、これら 2 つの場合において温度擾乱は全く同じになる. 雲頂レベル付近では背景温度は高度とともに低下するため、等エントロピー的な潮汐振幅は等圧的な潮汐振幅よりも大きくなるはずである. しかし、前者は後者の 2 倍未満であり位相は同一である. したがって図 16D,E に示された結果は、この点に関して 2 倍の範囲内で妥当であると予想される. さらなる不確かさは、上述した v_t の部分的な東西カバー範囲から生じるが、我々はそれが大きくはないと予想している (45).

2.6.6 金星における SR の維持について

2.5.1, 2.5.5 節の結果より、赤道域では熱潮汐波による負の加速と乱流と子午面循環による負の減速が起きており、これらの効果がある一定程度拮抗することによって、SR の東西速度のピークのが維持ができると考えられる. 実際の計算結果からは、雲頂付近では熱潮汐波によって $-0.6\text{ms}^{-1}\text{day}^{-1}$ 程度の加速、乱流と子午面循環によって $0.55\text{ms}^{-1}\text{day}^{-1}$ 程度の加速が起きていて、計算上でもこれらの効果が拮抗していると分かる.

¹³⁾ カバー範囲が限定的であるため、自己相関が高くなりやすいということであると推測している.

2.7 考察

今回の Horinouchi et al. (2020) では、子午面循環が観測によって得られたものではなくモデルにより得られたものとなっている。そして、このモデルを割り出す際に用いた非断熱加熱の南北構造が単純に $\cos \varphi$ に比例するものであり、太陽放射以外の加熱の南北差は小さいという仮定を用いている。子午面循環の角運動量輸送はという SR の角運動量収支に関わる部分において、この仮定がどれほどの影響を及ぼすのかが未だ不明である。そのため、この仮定が金星の状況と適合するのかや、どのような近似が適しているかについては、一考の余地があるだろう。

また、あかつきの IR2 を用いて下層から中層の雲層における風についても検討はされているものの、おそらく観測期間の影響で信頼性の高いデータが得られていない。そのため、この下層から中層の雲層における風の影響に関して議論ができていない。鉛直風速自体は図 5D より速くないと思われるが、この効果に関しては議論が必要であろう。

第 3 章

Transformed Eulerian Mean(TEM) 方程式

この章では, Andrews et al. (1987) と, Vallis(2006) にもとづき, TEM 方程式の導出を行う [1, 17].

3.1 TEM 方程式とは

そもそも変形オイラー平均 (Transformed Eulerian Mean, TEM) 方程式とは, ある変形操作を施された運動方程式のことを指す. これを用いると様々な条件下での渦の影響を議論できるような枠組みが得られる. TEM 方程式は, 熱力学の式から渦流束を除去し運動量の式に含ませるように平均化した, とても自然な形の方程式になっており, そのためポテンシャル渦度流束の役割が強調されている. また TEM 方程式では非断熱な効果と断熱的な効果, および移流流束と拡散流束が自然に分離されていて, 流れが断熱的な場合にはその方程式形は好ましい形式へと単純化される. 無論, 良いことづくめであるわけではなく, TEM 方程式を用いることに起因する問題も存在する.

3.2 TEM 方程式の導出

3.2.1 基礎方程式

この節の内容は Andrews et al. (1987) にもとづく¹⁴⁾.

Andrews et al. (1987) での最初の方程式は以下の方程式群である¹⁵⁾.

$$\frac{Du}{Dt} - \left(\frac{u \tan \varphi}{a} + f \right) v + \frac{\Phi_\lambda}{a \cos \varphi} = X, \quad (3.1a)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{u \tan \varphi}{a} + f \right) u + \frac{\Phi_\varphi}{a} = Y, \quad (3.1b)$$

$$\Phi_z = H^{-1} R \theta e^{-\kappa z/H}, \quad (3.1c)$$

$$\frac{u_\lambda + (v \cos \varphi)_\varphi}{a \cos \varphi} + \frac{(\rho_0 w)_z}{\rho_0} = 0, \quad (3.1d)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = S_q. \quad (3.1e)$$

これは Andrews et al. (1987) の式 (3.1.3a)-(3.1.3e) である.

この式では、経度・緯度・圧力座標系 (λ, φ, z) ¹⁶⁾ を用いていて、変数は、 u は流体の経度方向の速度 (東が正), v は流体の緯度方向の速度 (北が正), w は流体の鉛直方向の速度 (鉛直上方が正), $\theta = T e^{\kappa z/H}$ は温位, T は温度, Φ は重力ポテンシャル, $\rho_0(z)$ は参照密度, X は λ 方向の摩擦項, Y は φ 方向の摩擦項, S_q は非断熱加熱項である.

また、定数は、 a は惑星半径, $f = 2\Omega \sin \varphi$ はコリオリパラメータ, Ω は自転角速度 (自転方向が地球と逆ならば、負の値をとる), H は平均スケールハイト, R は気体定数, $\kappa = R/c_p$, c_p は定圧モル比熱である. また、添え字の λ, φ, z はその変数による偏微分を表している. ここでは、簡単のために H を定数と考えている.

¹⁴⁾ B.4 に Vallis (2006) を用いた TEM 方程式の導出がある.

¹⁵⁾ 導出に関しては、B.1 を参照せよ.

¹⁶⁾ ここで、標準参照気圧 p_s を用いて、

$$z \equiv -H \ln(p/p_s)$$

3.2.2 TEM 方程式の導出

ここからは、式 (3.1) に対してオイラー平均をとっていく。定義はあるスカラー量 f を用いて以下のように表される。

$$\bar{f}(\varphi, z, t) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(\lambda, \varphi, z, t) d\lambda. \quad (3.2)$$

また擾乱は以下のように表される。

$$f' \equiv f - \bar{f}. \quad (3.3)$$

計算をしていくと、式 (3.1) は以下のように変形できる¹⁷⁾。

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + \bar{v}[(a \cos \varphi)^{-1}(\bar{u} \cos \varphi)_\varphi - f] + \bar{w}\bar{u}_z - X \\ = -(a \cos^2 \varphi)^{-1}(\overline{v'u'} \cos^2 \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1}(\rho_0 \overline{w'u'})_z, \end{aligned} \quad (3.4a)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_t + a^{-1}\bar{v}\bar{v}_\varphi + \bar{w}\bar{v}_z + \bar{u}(f + \bar{u}a^{-1} \tan \varphi) + a^{-1}\bar{\Phi}_\varphi - \bar{Y} \\ = -(a \cos \varphi)^{-1}(\overline{v'^2} \cos \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1}(\rho_0 \overline{w'v'})_z - \overline{u'^2}a^{-1} \tan \varphi, \end{aligned} \quad (3.4b)$$

$$\bar{\Phi}_z - H^{-1}R\bar{\theta}e^{-\kappa z/H} = 0, \quad (3.4c)$$

$$(a \cos \varphi)^{-1}(\bar{v} \cos \varphi)_\varphi + \rho_0^{-1}(\rho_0 \bar{w})_z = 0, \quad (3.4d)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_t + a^{-1}\bar{v}\bar{\theta}_\varphi + \bar{w}\bar{\theta}_z - \bar{Q} \\ = -(a \cos \varphi)^{-1}(\overline{v'\theta'} \cos \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1}(\rho_0 \overline{w'\theta'})_z. \end{aligned} \quad (3.4e)$$

これで、Andrews et al. (1987) における式 (3.3.2a)-(3.3.2e) である。ただし、添え字 t はオイラー微分を表す。

ここから、式 (3.4) に対して残差循環¹⁸⁾を導入する。残差循環 $\bar{v}^* \equiv (0, \bar{v}^*, \bar{w}^*)$ は以下のように定義される。

$$\bar{v}^* \equiv \bar{v} - \rho_0^{-1}(\rho_0 \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z)_z, \quad (3.5a)$$

$$\bar{w}^* \equiv \bar{w} + (a \cos \varphi)^{-1}(\cos \varphi \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z)_\varphi. \quad (3.5b)$$

¹⁷⁾ 導出は B.2 を参照せよ。

¹⁸⁾ 残差循環とは、単純なオイラー平均に熱的な補正項を加えたものである。これを導入することでポテンシャル渦度フラックスが帯状平均流に与える影響をより考えやすくなる。

式 (3.4) に式 (3.5) を代入し計算していくと以下のようなになる¹⁹⁾.

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + \bar{v}^* [(a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi - f] + \bar{w}^* \bar{u}_z - \bar{X} \\ = (\rho_0 a \cos \varphi)^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (3.6a)$$

$$\bar{u}(f + \bar{u} a^{-1} \tan \varphi) + a^{-1} \bar{\Phi}_\varphi = G, \quad (3.6b)$$

$$\bar{\Phi}_z - H^{-1} R \bar{\theta} e^{-\kappa z/H} = 0, \quad (3.6c)$$

$$(a \cos \varphi)^{-1} (\bar{v}^* \cos \varphi)_\varphi + \rho_0^{-1} (\rho_0 \bar{w}^*)_z = 0, \quad (3.6d)$$

$$\bar{\theta}_t + a^{-1} \bar{v}^* \bar{\theta}_\varphi + \bar{w}^* \bar{\theta}_z - \bar{Q} = -\rho_0^{-1} [\rho_0 (\bar{v}' \bar{\theta}' / \bar{\theta}_z + \bar{w}' \bar{\theta}')]_z. \quad (3.6e)$$

ただし, $\mathbf{F} = (0, F^{(\varphi)}, F^{(z)})$ はエリアッセン-パームフラックスであり,

$$F^{(\varphi)} \equiv \rho_0 a \cos \varphi (\bar{u}_z \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z - \overline{v' u'}), \quad (3.7a)$$

$$F^{(z)} \equiv \rho_0 a \cos \varphi [\{f - (a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi\} \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z - \overline{w' u'}] \quad (3.7b)$$

である. これで, Andrews et al. (1987) における TEM 方程式 (3.5.2a)-(3.5.2e) の導出ができた.

3.2.3 角運動量・温度を用いた TEM 方程式の表現

ここでは, Horinouchi et al. (2020) で使われていた TEM 方程式の表現を求める. 式 (3.6a) に $(a \cos \varphi)$ をかけて展開すると,

$$a \bar{u}_t \cos \varphi + \bar{v}^* (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi - a f \bar{v}^* \cos \varphi + a \bar{u}_z \bar{w}^* \cos \varphi = \rho_0^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (3.8)$$

$f = 2\Omega \sin \varphi$ を代入し, $(\bar{u} \cos \varphi)_\varphi$ を展開して,

$$a \bar{u}_t \cos \varphi + \bar{v}^* \bar{u}_\varphi \cos \varphi - \bar{v}^* \bar{u} \sin \varphi - 2a\Omega \bar{v}^* \cos \varphi \sin \varphi + a \bar{u}_z \bar{w}^* \cos \varphi = \rho_0^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (3.9)$$

ここで, 絶対角運動量 $M = a \bar{u} \cos \varphi + a^2 \Omega \cos^2 \varphi$ を用いると,

$$M_t = a \bar{u}_t \cos \varphi, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \nabla M &= a^{-1} (a \bar{u}_\varphi \cos \varphi - a \bar{u} \sin \varphi - 2a^2 \Omega \cos \varphi \sin \varphi) + a \bar{u}_z \cos \varphi \\ &= \bar{u}_\varphi \cos \varphi - \bar{u} \sin \varphi - 2a\Omega \cos \varphi \sin \varphi + a \bar{u}_z \cos \varphi, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\bar{v}^* \cdot \nabla M = \bar{v}^* \bar{u}_\varphi \cos \varphi - \bar{v}^* \bar{u} \sin \varphi - 2a\Omega \bar{v}^* \cos \varphi \sin \varphi + a \bar{u}_z \bar{w}^* \cos \varphi. \quad (3.12)$$

¹⁹⁾ 導出は B.3 を参照せよ.

式 (3.10), (3.12) より, 式 (3.9) は,

$$M_t + \bar{\mathbf{v}}^* \cdot \nabla M = \rho_0^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (3.13)$$

とかける. 論文のものと表式を合わせると,

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\mathbf{v}^r \cdot \nabla M + \rho_0^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (3.14)$$

となり, 論文で用いられていた式を導出できた.

ここからは, エリアッセン-パームフラックスの温度を用いた表現を求める. 現在のエリアッセン-パームフラックスの表式は,

$$F^{(\varphi)} \equiv \rho_0 a \cos \varphi (\bar{u}_z \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z - \overline{v' u'}) , \quad (3.15a)$$

$$F^{(z)} \equiv \rho_0 a \cos \varphi [\{f - (a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi\} \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z - \overline{w' u'}] \quad (3.15b)$$

である. まず, 温位と温度の関係式の従属変数を平均場と擾乱場に分けて, 再度平均を取ると,

$$\begin{aligned} (\bar{\theta} + \theta') &= (\bar{T} + T') e^{\kappa z/H} \\ \bar{\theta} &= \bar{T} e^{\kappa z/H} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\theta' = T' e^{\kappa z/H} . \quad (3.17)$$

よって,

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_z &= \left(\bar{T} e^{\kappa z/H} \right)_z \\ &= \bar{T}_z e^{\kappa z/H} + \bar{T} \kappa H^{-1} e^{\kappa z/H} \\ &= (\bar{T}_z + \bar{T} \kappa H^{-1}) e^{\kappa z/H} . \end{aligned} \quad (3.18)$$

そして, 式 (3.6c) と, $\kappa = R/c_p$ より,

$$\begin{aligned} \bar{T} \kappa H^{-1} &= (\bar{T} R H^{-1}) c_p^{-1} \\ &= \bar{\Phi}_z / c_p . \end{aligned} \quad (3.19)$$

$\bar{\Phi}_z = g$ とすると,

$$\bar{T} \kappa H^{-1} = g/c_p = \Gamma . \quad (3.20)$$

ただし, Γ は乾燥断熱減率である. そして, $S = \bar{T}_z + \Gamma$ とすると,

$$\bar{\theta}_z = S e^{\kappa z/H} . \quad (3.21)$$

また,

$$\begin{aligned}\overline{v'\theta'} &= \overline{v'T'e^{\kappa z/H}} \\ &= \overline{v'T'}e^{\kappa z/H} .\end{aligned}\tag{3.22}$$

式 (3.21), (3.22) より, $F^{(\varphi)}$ は,

$$F^{(\varphi)} \equiv \rho_0 a \cos \varphi (\bar{u}_z S^{-1} \overline{v'T'} - \overline{v'u'}) .\tag{3.23}$$

また, 絶対渦度の垂直成分 ζ_a は,

$$\begin{aligned}\zeta_a &= f + (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} \\ &= f + (a \cos \varphi)^{-1} \bar{v}_\lambda - (a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi \\ &= f - (a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi .\end{aligned}\tag{3.24}$$

よって, 式 (3.21), (3.22), (3.24) より, $F^{(z)}$ は,

$$F^{(z)} = \rho_0 a \cos \varphi [\zeta_a S^{-1} \overline{v'T'} - \overline{w'u'}] .\tag{3.25}$$

最後にここで, 4つの変数を定義する.

$$f_{\varphi v} \equiv -\overline{v'u'} \cos \varphi ,\tag{3.26}$$

$$f_{\varphi T} \equiv \bar{u}_z S^{-1} \overline{v'T'} \cos \varphi ,\tag{3.27}$$

$$f_{zw} \equiv -\overline{w'u'} \cos \varphi ,\tag{3.28}$$

$$f_{zT} \equiv \zeta_a S^{-1} \overline{v'T'} \cos \varphi .\tag{3.29}$$

すると, エリアッセン-パームフラックスは,

$$F^{(\varphi)} = \rho_0 a (f_{\varphi v} + f_{\varphi T}) ,\tag{3.30a}$$

$$F^{(z)} = \rho_0 a (f_{zw} + f_{zT})\tag{3.30b}$$

となり, 論文でのエリアッセン-パームフラックスを導出できた.

第 4 章

波を記述する方程式

この章では, Andrews et al. (1987) と Longuet-Higgins (1968) を参考に波とそれを記述する方程式についてまとめる [1, 10].

4.1 ラプラスの潮汐方程式の導出

4.1.1 基礎方程式

出発する基礎方程式は以下である.

$$\frac{Du}{Dt} - \left(\frac{u \tan \varphi}{a} + f \right) v + \frac{\Phi_\lambda}{a \cos \varphi} = X, \quad (4.1a)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{u \tan \varphi}{a} + f \right) u + \frac{\Phi_\varphi}{a} = Y, \quad (4.1b)$$

$$\Phi_z = H^{-1} R \theta e^{-\kappa z/H}, \quad (4.1c)$$

$$\frac{u_\lambda + (v \cos \varphi)_\varphi}{a \cos \varphi} + \frac{(\rho_0 w)_z}{\rho_0} = 0, \quad (4.1d)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = S_q. \quad (4.1e)$$

これは Andrews et al. (1987) の式 (3.1.3a)-(3.1.3e) である.

この式では、経度・緯度・圧力座標系 (λ, φ, z) ²⁰⁾ を用いていて、変数は、 u は流体の経度方向の速度 (東が正)、 v は流体の緯度方向の速度 (北が正)、 w は流体の鉛直方向の速度 (鉛直上方が正)、 $\theta = Te^{\kappa z/H}$ は温位、 T は温度、 Φ は重力ポテンシャル、 $\rho_0(z)$ は参照密度、 X は λ 方向の摩擦項、 Y は φ 方向の摩擦項、 $S_q = \dot{Q}/c_p e^{\kappa z/H}$ は非断熱加熱項、 $\dot{Q}$ は単位質量あたりの断熱加熱率であり、以降 J と表記する。

また、定数は、 a は惑星半径、 $f = 2\Omega \sin \varphi$ はコリオリパラメータ、 Ω は自転角速度 (自転方向が地球と逆ならば、負の値をとる)、 H は平均スケールハイト、 R は気体定数、 $\kappa = R/c_p$ 、 c_p は定圧モル比熱である。また、添え字の λ, φ, z はその変数による偏微分を表している。ここでは、簡単のために H を定数と考えている。

4.1.2 帯状平均流に対する線形化された擾乱

基本場の流れとして、定常かつ経度対称な東西流を考える。

ある変数 x の基本状態を $\bar{x}_0$ と表すと、 $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(\varphi, z)$ 、 $\bar{v}_0 = \bar{w}_0 = 0$ となる。

また、基本場では定常外力なしと仮定する。よって $\bar{X}_0 = 0$ 、 $\bar{Y}_0 = 0$ とする。すると、式 (4.1) より基本場が満たす式は

$$\frac{D\bar{u}_0}{Dt} + \frac{\bar{\Phi}_{0\lambda}}{a \cos \varphi} = 0, \quad (4.2a)$$

$$\left(\frac{\bar{u}_0 \tan \varphi}{a} + f \right) \bar{u}_0 + \frac{\bar{\Phi}_{0\varphi}}{a} = 0, \quad (4.2b)$$

$$\bar{\Phi}_{0z} = H^{-1} R \bar{\theta}_0 e^{-\kappa z/H}, \quad (4.2c)$$

$$\frac{D\bar{\theta}_0}{Dt} = \bar{S}_{q0}. \quad (4.2e)$$

ここで、 $D\bar{u}_0/Dt = 0$ より²¹⁾、式 (4.2a) は、

$$\bar{\Phi}_{0\lambda} = 0, \quad (4.3)$$

²⁰⁾ ここで、標準参照気圧 p_s を用いて、

$$z \equiv -H \ln(p/p_s)$$

²¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{u}_0}{Dt} &= \bar{u}_{0t} + \bar{u}_0 \bar{u}_{0\lambda} + \bar{v}_0 \bar{u}_{0\varphi} + \bar{w}_0 \bar{u}_{0z} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

つまり, $\bar{\Phi}_0$ には λ 依存性がなく $\bar{\Phi}_0(\varphi, z)$ となる. また, 式 (4.2c) より, $\bar{\theta}_0$ も λ 依存性がなく $\bar{\theta}_0(\varphi, z)$ となる. すると, 式 (4.2e) より, $\bar{S}_{q0} = 0$ となる²²⁾.

式 (4.2b), (4.2c) を用いて $\bar{\Phi}_0$ を消去すると,

$$\left(f + \frac{2\bar{u}_0 \tan \varphi}{a}\right) \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z} = \frac{-R}{aH} \frac{\partial \bar{\theta}_0}{\partial \varphi} e^{-\kappa z/H} = \frac{-R}{aH} \frac{\partial \bar{T}_0}{\partial \varphi}. \quad (4.4)$$

ここで, 各従属点数を無次元振幅パラメータ $\alpha \ll 1$ を用いて以下のように展開する.

$$u = \bar{u}_0 + u' + O(\alpha^2), \quad (4.5)$$

$$v = v' + O(\alpha^2), \quad (4.6)$$

$$w = w' + O(\alpha^2), \quad (4.7)$$

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi' + O(\alpha^2), \quad (4.8)$$

$$\theta = \bar{\theta} + \theta' + O(\alpha^2). \quad (4.9)$$

ただし, 擾乱項 $u', v', w', \Phi', \theta'$ は $O(\alpha)$ である. すると, 式 (4.1) は

$$\begin{aligned} \bar{D}u' + [(a \cos \varphi)^{-1}(\bar{u}_0 \cos \varphi)_\varphi - f]v' \\ + \bar{u}_{0z}w' + (a \cos \varphi)^{-1}\Phi'_\lambda = X', \end{aligned} \quad (4.10a)$$

$$\bar{D}v' + (f + 2\bar{u}_0 a^{-1} \tan \varphi)u' + a^{-1}\Phi'_\varphi = Y', \quad (4.10b)$$

$$\Phi'_z = H^{-1}R\theta' e^{-\kappa z/H}, \quad (4.10c)$$

$$(a \cos \varphi)^{-1}[u'_\lambda + (v' \cos \varphi)_\varphi] + \rho_0^{-1}(\rho_0 w')_z = 0, \quad (4.10d)$$

$$\bar{D}\theta' + a^{-1}\bar{\theta}_{0\varphi}v' + \bar{\theta}_{0z}w' = S'_q \quad (4.10e)$$

となる²³⁾. ただし, $\bar{X}_0 = \bar{Y}_0 = 0$ であり,

$$\bar{D} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{u}_0}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

である.

²²⁾ 各変数の基本状態は, φ, z のみの変数なので,

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{\theta}_0}{Dt} &= \bar{\theta}_{0t} + \bar{u}_0 \bar{\theta}_{0\lambda} + \bar{v}_0 \bar{\theta}_{0\varphi} + \bar{w}_0 \bar{\theta}_{0z} \\ &= \bar{v}_0 \bar{\theta}_{0\varphi} + \bar{w}_0 \bar{\theta}_{0z} \\ &= \bar{S}_{q0} \end{aligned}$$

となり, $\bar{v}_0 = \bar{w}_0 = 0$ より, $\bar{S}_0 = 0$ である必要がある.

²³⁾ 導出は C.1 節を参照.

4.1.3 静止した球殻大気への波動擾乱

次に、回転する惑星に対して静止している成層球殻大気について考える²⁴⁾。

まずは、 $\bar{u}_0 = 0$ とする。すると、式 (4.4) より、 $\bar{\theta}_{0\varphi} = 0$ となる。また、式 (4.10c) を用いて式 (4.10e) から θ' を消去すると

$$\begin{aligned}\bar{D}\theta' + \bar{\theta}_{0z}w' &= R^{-1}He^{\kappa z/H}\Phi'_{zt} + \bar{\theta}_{0z}w' \\ &= S'_q.\end{aligned}\quad (4.11)$$

ただし、添え字の t は時間に関するオイラー微分を表す。ここで、浮力振動数 $N^2(z) \equiv H^{-1}R\bar{\theta}_{0z}e^{-\kappa z/H}$ と $S'_q = J'/c_p e^{\kappa z/H}$ 、 $\kappa = R/c_p$ より

$$\begin{aligned}R^{-1}He^{\kappa z/H}\Phi'_{zt} + \bar{\theta}_{0z}w' &= S'_q, \\ R^{-1}He^{\kappa z/H}\Phi'_{zt} + N^2HR^{-1}e^{\kappa z/H}w' &= \frac{J'}{c_p}e^{\kappa z/H}, \\ \Phi'_{zt} + N^2w' &= \kappa J'/H.\end{aligned}\quad (4.12)$$

よって、方程式系は

$$u'_t - fv' + (a \cos \varphi)^{-1} \Phi'_\lambda = X', \quad (4.13a)$$

$$v'_t + fu' + a^{-1} \Phi'_\varphi = Y', \quad (4.13b)$$

$$(a \cos \varphi)^{-1} \left[u'_\lambda + (v' \cos \varphi)_\varphi \right] + \rho_0^{-1} (\rho_0 w')_z = 0, \quad (4.13c)$$

$$\Phi'_{zt} + N^2w' = \kappa J'/H, \quad (4.13d)$$

となる。

ここから 4.1.3 節では、保存力のみが働く状況、つまり $X' = Y' = J' = 0$ での解を考える。ここで、解を以下のように変数分離していく。

$$[u', v', \Phi'] = e^{z/2H} U(z) \left[\tilde{u}(\lambda, \varphi, t), \tilde{v}(\lambda, \varphi, t), \tilde{\Phi}(\lambda, \varphi, t) \right] \quad (4.14a)$$

²⁴⁾ Andrews et al. (1987) では、

「回転する惑星に対して静止している成層球状大気が微小な擾乱を受けると、重要な種類の波動運動が生じる。このような系の研究は 19 世紀初頭にラプラスによって始められ、大気の挙動に関する多くの知見をもたらした。特に、これは潮汐の理論 (Andrews et al. (1987) の 4.3 節) と全球ノーマルモード (Andrews et al. (1987) の 4.4 節) の基礎をなしている。」

とあり、この波の章における重要な式も記述することができる。

および

$$w' = e^{z/2H} W(z) \quad \tilde{w}(\lambda, \varphi, t) . \quad (4.14b)$$

ただし, U は無次元, W は [m], $\tilde{u}, \tilde{v}$ は [ms^{-1}], $\tilde{\Phi}$ は [m^2s^{-2}], $\tilde{w}$ は [s^{-1}] の次元を持つ.

式 (4.14a) を式 (4.13a), (4.13b) に代入すると, $X' = Y' = 0$ より

$$\tilde{u}_t - f\tilde{v} + (a \cos \varphi)^{-1} \tilde{\Phi}_\lambda = 0 , \quad (4.15a)$$

$$\tilde{v}_t + f\tilde{u} + a^{-1} \tilde{\Phi}_\varphi = 0 . \quad (4.15b)$$

式 (4.14a) を式 (4.13c) に代入すると

$$\begin{aligned} & (a \cos \varphi)^{-1} e^{z/2H} U \left[\tilde{u}_\lambda + (\tilde{v} \cos \varphi)_\varphi \right] + \rho_0^{-1} \tilde{w} \left[\rho_0 e^{z/2H} W \right]_z = 0 , \\ & (a \cos \varphi)^{-1} e^{z/2H} U \left[\tilde{u}_\lambda + (\tilde{v} \cos \varphi)_\varphi \right] \\ & + \rho_0^{-1} \tilde{w} \left[-\rho_0 e^{z/2H} W/H + \rho_0 e^{z/2H} W/2H + \rho_0 e^{z/2H} W_z \right] = 0 , \\ & (a \cos \varphi)^{-1} e^{z/2H} U \left[\tilde{u}_\lambda + (\tilde{v} \cos \varphi)_\varphi \right] + \tilde{w} e^{z/2H} \left[W_z - \frac{W}{2H} \right] = 0 , \\ & U (a \cos \varphi)^{-1} \left[\tilde{u}_\lambda + (\tilde{v} \cos \varphi)_\varphi \right] + \left(W_z - \frac{W}{2H} \right) \tilde{w} = 0 . \end{aligned} \quad (4.16a)$$

式 (4.14a) を式 (4.13d) に代入すると, $J' = 0$ より

$$\begin{aligned} & \tilde{\Phi}_t e^{z/2H} \left[U_z + \frac{U}{2H} \right] + N^2 e^{z/2H} W \tilde{w} = 0 , \\ & \left(U_z + \frac{U}{2H} \right) \tilde{\Phi}_t + N^2 W \tilde{w} = 0 . \end{aligned} \quad (4.16b)$$

式 (4.16a) について, $U, (W_z - W/2H)$ は z 依存項, $(a \cos \varphi)^{-1} \left[\tilde{u}_\lambda + (\tilde{v} \cos \varphi)_\varphi \right], \tilde{w}$ は λ, φ, t 依存項であることより, z 依存項については

$$U = \frac{dW}{dz} - \frac{W}{2H} \quad (4.17a)$$

となる²⁵⁾。式 (4.17a) を式 (4.16b) に代入すると、

$$\left(W_{zz} - \cancel{\frac{W_z}{2H}} + \cancel{\frac{W_z}{2H}} - \frac{W}{4H^2} \right) \tilde{\Phi}_t + N^2 W \tilde{w} = 0, \\ - \left(W_{zz} - \frac{W}{4H^2} \right) / N^2 W = \tilde{w} / \tilde{\Phi}_t = (gh)^{-1}. \quad (4.17b)$$

ただし、 $(gh)^{-1}$ は分離定数であり、等価深度²⁶⁾と呼ばれる量 h は長さの次元を持つ。すると、式 (4.17), (4.16a) より

$$(a \cos \varphi)^{-1} \left[\tilde{u}_\lambda + (\tilde{v} \cos \varphi)_\varphi \right] + (gh)^{-1} \tilde{\Phi}_t = 0 \quad (B.15c)$$

が得られ、式 (4.17b) の両端の項から、

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left(\frac{N^2}{gh} - \frac{1}{4H^2} \right) W = 0 \quad (4.18a)$$

が得られる。

式 (4.15) はラプラスの潮汐方程式 (水平構造方程式)、式 (4.18a) は垂直構造方程式と呼ばれる。この式の下方境界条件は以下のようなになる²⁷⁾。

$$\frac{dW}{dz} + \left(\frac{R\bar{T}(0)}{gh} - \frac{1}{2} \right) \frac{W}{H} = 0. \quad (4.18b)$$

ここからは、ラプラスの潮汐方程式の解を求める。解の形として帯状波数 s (整数) と周期 $2\pi/2\Omega\sigma$ の正弦波形式

$$[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\Phi}] = \Re \left([\hat{u}(\varphi), \hat{v}(\varphi), \hat{\Phi}(\varphi)] \exp[i(s\lambda - 2\Omega\sigma t)] \right) \quad (4.19)$$

を仮定する²⁸⁾。式 (4.15a), (4.15b) を $\hat{u}, \hat{v}$ について解くと

$$\hat{u} = [2\Omega a (\sigma^2 - \sin^2 \varphi)]^{-1} \left[\cos^{-1} \varphi \cdot \sigma s \hat{\Phi} + \sin \varphi \cdot \hat{\Phi}_\varphi \right], \quad (4.20a)$$

²⁵⁾ t, λ, φ, z は独立変数なので、変数分離をすると、

$$\frac{U}{W_z - \frac{W}{2H}} = - \frac{\tilde{w}}{(a \cos \varphi)^{-1} [\tilde{u}_\lambda + (\tilde{v} \cos \varphi)_\varphi]} = \text{const.}$$

となり、 U と $(W_z - W/2H)$ は比例関係にあると分かる。

そして、式 (4.17a) の比例定数が 1 となっているのは、この値が何になったとしても最終的に h に包含されてしまうためである。

²⁶⁾ 等価深度は、深さが h で一様な海洋と大気が力学的に等価なことから名付けられた。

²⁷⁾ 導出は C.2 節を参照。

²⁸⁾ σ は周波数 2day^{-1} に対して何倍の周波数を持つかを表す。つまり、日周成分は $\sigma = -1/2$ 、半日周成分は $\sigma = -1$ となる。ここにマイナスがつくのは、地表面から見て太陽は自転と逆方向に動くからである。

$$\hat{v} = - \left[2\Omega a (\sigma^2 - \sin^2 \varphi) \right]^{-1} i \left[\tan \varphi \cdot s \hat{\Phi} + \sigma \hat{\Phi}_\varphi \right]. \quad (4.20b)$$

式 (4.20a), (4.20b) を式 (B.15c) に代入して整理すると,

$$\mathcal{L} \hat{\Phi} + \gamma \hat{\Phi} = 0. \quad (4.21a)$$

ここで $\gamma \equiv 4\Omega^2 a^2 / gh$ はラムのパラメータと呼ばれ,

$$\mathcal{L} \equiv \frac{d}{d\mu} \left[\frac{1 - \mu^2}{\sigma^2 - \mu^2} \frac{d}{d\mu} \right] - \frac{1}{\sigma^2 - \mu^2} \left[\frac{-s(\sigma^2 + \mu^2)}{\sigma(\sigma^2 - \mu^2)} + \frac{s^2}{1 - \mu^2} \right] \quad (4.21b)$$

は変数

$$\mu \equiv \sin \varphi \quad (-1 \leq \mu \leq 1)$$

に関する二階常微分作用素であり, s および σ に依存する²⁹⁾. 式 (4.21a) の境界条件は, $\hat{\Phi}$ が極において有界なことだ. s と σ が指定される場合, $\hat{\Phi}$ は極において有界になり, 整数値 n に対して, 固有値 $\gamma_n^{(\sigma, s)}$ と固有関数 $\Theta_n^{(\sigma, s)}$ を

$$\mathcal{L} \Theta_n^{(\sigma, s)} + \gamma_n^{(\sigma, s)} \Theta_n^{(\sigma, s)} = 0 \quad (4.22)$$

となるように求めることができる. この $\Theta_n^{(\sigma, s)}$ はハフ関数と呼ばれる. ハフ関数に関する図は以下である.

²⁹⁾ 導出は C.3 節を参照.

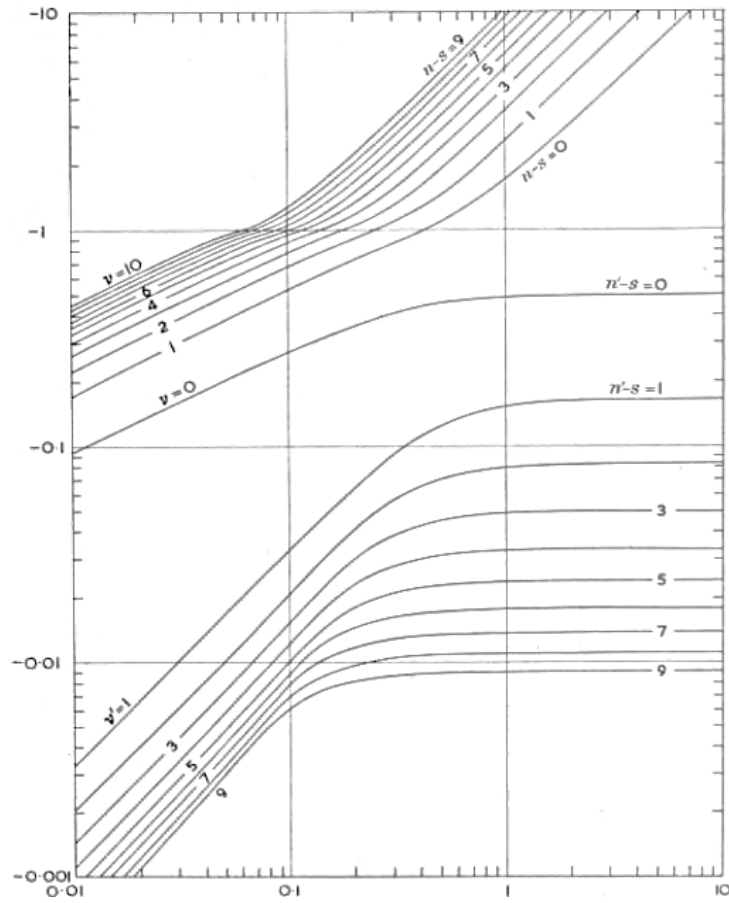


図 17: $s = 1$ かつ正の固有値を持つ自転と逆方向の位相速度の波の分散関係. 縦軸は σ , 横軸は $\gamma^{-\frac{1}{2}} = (gh)^{-\frac{1}{2}} / 2\Omega a$ である. (Longuet-Higgins, 1968)

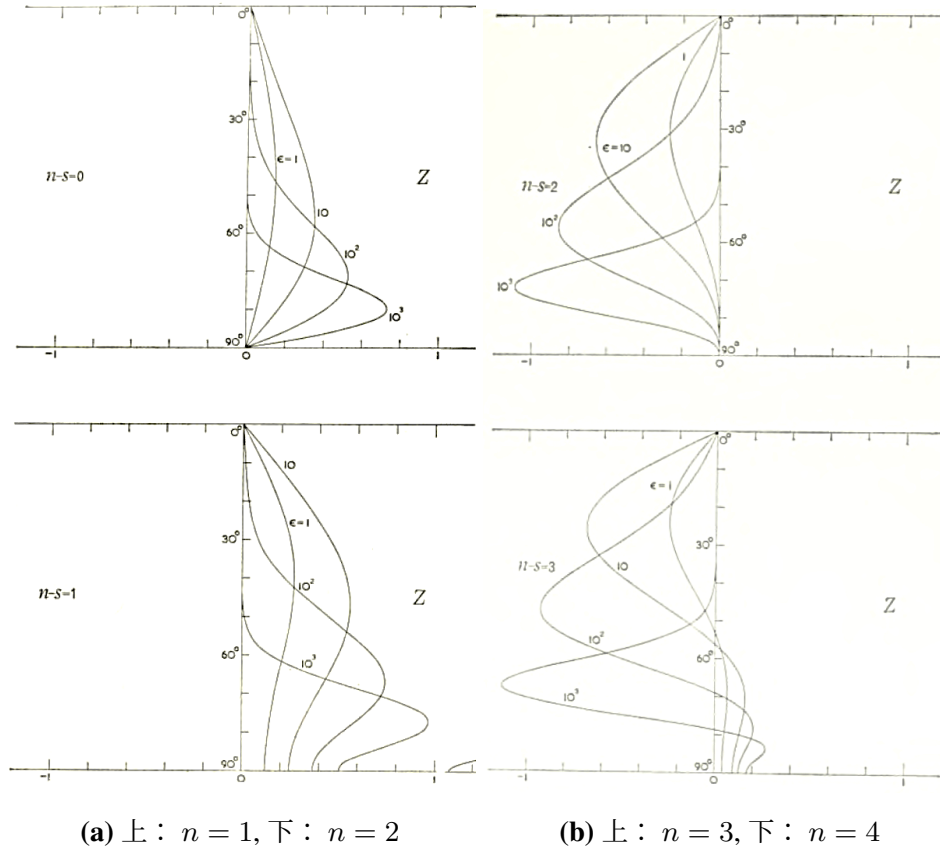


図 18: $s = 1$ かつ正の固有値を持つ自転と逆方向の位相速度の波の構造．縦軸が緯度，横軸が振幅で，左上・左下・右上・右下と $n = 1, 2, 3, 4$ である．複数線があるのは，それぞれ固有値 γ が 1, 10, 100, 1000 の線である．

σ, s, n の値によっては， $\gamma_n^{(\sigma, s)}$ は負になりえる．また， $\gamma < 0$ を満たすモードの周波数は全て

$$|\sigma| < 1 \quad (4.23)$$

を満たす³⁰⁾．今後， $s = -2\sigma$ を満たすときのハフ関数は $\Theta_n^{(s)}$ のように s のみを用いてあらわすこととする³¹⁾．

そして，鉛直構造方程式の解を考える．波型の解を考えるために， $0 < h < 4N^2H^2/g$ と

³⁰⁾ 証明はよく分からない．ハフ関数が数値的に解かれた関数なので，中身があまりよく分かっていないからである．

³¹⁾ 特に $s = 1$ のときは日周ハフ関数， $s = 2$ のときは半日周ハフ関数と呼ばれる．

する．そして，式 (4.18a) の解として，

$$W = \hat{W} \exp(imz) \quad (4.24)$$

を仮定する．ただし， m は z 方向の波数である．これを式 (4.18a) に代入して

$$\left(-m^2 + \frac{N^2}{gh} - \frac{1}{4H^2}\right) \hat{W} = 0. \quad (4.25)$$

これが常に成り立つには，係数が 0 である必要があるため， m は

$$m = \sqrt{\frac{N^2}{gh} - \frac{1}{4H^2}}. \quad (4.26)$$

波長 λ_v に直すと，

$$\lambda_v = 2\pi \left[\frac{N^2}{gh} - \frac{1}{4H^2} \right]^{-1/2} \quad (4.27)$$

である．

4.2 熱潮汐波

ここでは，Horinouchi et al. (2020) で議論されている熱潮汐波についてまとめる．

4.2.1 熱潮汐波とは

熱潮汐波は太陽加熱によって励起される波である．太陽加熱は時間的に一定ではなく，夜のときは当然 0 であり，昼のときは日の出南中にかけて加熱量が増加しその後は日の入りにかけて 0 に近づいていくような挙動を見せる．そのため，この加熱は定常成分や日周成分，半日周成分などを持つ．それゆえに，それに対する応答も定常モードや日周モード，半日周モード，高周波数モードに分解できる．この応答が熱潮汐波に対応する．

地球での観測においては，半日周表面気圧変動が日周振動に対して大きくて規則的なことが知られている．これは太陽加熱の半日周成分と日周成分の中層・下層での応答を考えると説明できる．強制される半日周振動の鉛直波長は 100km 以上であり³²⁾，成層圏界面の

³²⁾ 何の物理量の話かが不明である．おそらく u, v, Φ であろうと推測される．

深層オゾン加熱領域で効率的に励起されてそれが地表面気圧変動として現れる。そして、この加熱は規則的であり、その緯度構造がほぼ均一なので³³⁾、その応答も規則的になる。一方日周振動の場合は³⁴⁾、北緯 30 度から南緯 30 度では鉛直波長が 24km でオゾン加熱によって鉛直方向に伝播するものの、30 度以極域ではその励起領域付近で閉じ込められる。そのため、鉛直伝播モードは破壊されるように干渉し、閉じ込めモードは地表面に届くことはない。その代わりに、対流圏の比較的浅い水蒸気加熱域は波を効率的に励起できる。しかしながら、これは空間的・時間的に断続的である。そのため、結果として起こる地表面気圧変動も断続的となる。

4.2.2 古くから用いられている潮汐理論

ここからは、基本的に静止している大気に対する線形擾乱を考慮した潮汐理論についてまとめていく³⁵⁾。したがって、式 (4.13) の方程式系を適切な熱強制項 $\kappa J'/H$ と共に使用する。力学的強制項または散逸項 X' および Y' は 0 とする。移動性潮汐波のみを考えることとし、そのゆえに全ての変数が現地時間、緯度、高度のみに依存すると考える。たとえば、 $J' = J'(-\lambda - \Omega t, \varphi, z)$ であり、 $-\lambda - \Omega t$ は t をグリニッジ標準時としたときの経度 λ の現地時間である³⁶⁾。また、 $\bar{J}$ は本来非ゼロであるが、帯状平均赤外線冷却によって相殺されると仮定し、 $\bar{J} = 0$ と考える。

J' は周期的なので、フーリエ調和関数で展開すると、

$$J' = \Re \sum_{s=1}^{\infty} J^{(s)}(\varphi, z) e^{is(-\lambda - \Omega t)} \quad (4.28)$$

となる。ここで係数 $J^{(s)}$ は放射光化学計算から既知であると仮定する³⁷⁾。次に、各 $J^{(s)}(\varphi, z)$ をハフ関数で展開していく。具体的には、日周ハフ関数 $\Theta_n^{(1)}$ で $J^{(1)}$ を、半日周ハフ関数 $\Theta_n^{(2)}$ で $J^{(2)}$ を展開していく。式 (4.23) より、 $J^{(2)}$ と違って $J^{(1)}$ では展開のときには負の等価深度を持つモードを考慮する必要がある。

³³⁾ 緯度構造の話がどのように関連しているかが分からない

³⁴⁾ この日周振動の場合の話がよく分かっていない。

³⁵⁾ この内容は Chapman and Lindzen (1970) などで提唱されている

³⁶⁾ 地球の場合は、 $\lambda + \Omega t$ となる。地球は日付変更線を超えないならば東の方が、金星では西の方が時間が早い。

³⁷⁾ この仮定は必ずしも正確ではない。例えば、太陽加熱を部分的に決定するオゾン分布は、加熱に対する潮汐応答にある程度依存する。

例として日周強制 $J_n^{(1)}(\varphi, z)e^{i(-\lambda-\Omega t)}$ とそれに対する強制を考える。まず、 $J^{(1)}(\varphi, z)e^{i(-\lambda-\Omega t)}$ を以下のように記述する。

$$J^{(1)}(\varphi, z) = \sum_n J_n^{(1)}(z)\Theta_n^{(1)}(\mu). \quad (4.29)$$

ここで $J_n^{(1)}$ は日周加熱を n 番目の日周ハフ関数に投影したものになっている。これに対応する応答として、ここでは例として鉛直速度 $w^{(1)}(\varphi, z)e^{i(-\lambda-\Omega t)}$ を考えることにする。式 (4.14b), (4.29) からの推測から

$$w^{(1)}(\varphi, z) = \sum_n e^{z/2H} W_n^{(1)}(z)\Theta_n^{(1)}(\mu) \quad (4.30)$$

となると考えることができる。そしてここで式 (4.13) に戻り、 $X' = Y' = 0$ とし、すべてのプライム付きの文字に $e^{i(-\lambda-\Omega t)}$ の日周依存性を持たせる。そして、式 (2.13a,b) を用いて日周速度振幅 $u^{(1)}, v^{(1)}$ を $\Phi^{(1)}$ で表し、式 (4.13d) でそれらを $w^{(1)}, J^{(1)}$ で表現しなおす。その後、式 (4.13c) にそれらを代入すると、 z と μ に関する偏微分方程式が得られる。それを式 (4.29), (4.30) と $\Theta_n^{(1)}$ に対するラプラスの潮汐方程式 [式 (4.21a) 参照] を用いて書き直すと、 μ 依存性が分離されて以下のような不均一な鉛直構造方程式が得られる³⁸⁾。

$$\frac{d^2 W_n^{(1)}}{dz^2} + \left[\frac{N^2}{gh_n^{(1)}} - \frac{1}{4H^2} \right] W_n^{(1)} = \frac{\kappa J_n^{(1)}(z)e^{-z/2H}}{gHh_n^{(1)}}. \quad (4.31)$$

この式は以下の均質な下方境界条件を伴う。

$$\frac{dW_n^{(1)}}{dz} + \left(\frac{R\bar{T}(0)}{gh_n^{(1)}} - \frac{1}{2} \right) \frac{W_n^{(1)}}{H} = 0. \quad (4.32)$$

ただし、 $h_n^{(1)}$ は n 番目の日周等価深度である。ここからは、上方境界条件について考えていく。高高度では鉛直伝播擾乱は放射条件に従う、つまり情報を下方ではなく上方に伝達すると仮定する³⁹⁾。この放射条件は具体的には、ある高度 z_{upper} 以上では群速度が鉛直上方向きの擾乱のみが存在するということである。 z_{upper} 以上では強制力 $J_n^{(1)}$ がなくなり、平均温度 $\bar{T}(z)$ が一定になると仮定する。つまり、 $T_\infty \equiv \bar{T}(z_{\text{upper}})$ について、 $N^2 = R\kappa T_\infty/H^2 = g\kappa T_\infty/HT_s \equiv N_\infty^2$ が一定となるようにする⁴⁰⁾。したがって、

³⁸⁾ 導出は C.4 節を参照せよ。ただ、C.3 節での証明の工程の順序が違っているので、後ほど式の対応を考える。

³⁹⁾ この仮定は、平均的な大気条件では高高度における鉛直伝播擾乱の顕著な反射が生じないと暗に仮定するものである。

⁴⁰⁾ $H \equiv RT_s/g$ であり、 T_s は定数参照温度である。

$z > z_{\text{upper}}$ において式 (4.31) が

$$\frac{d^2 W_n^{(1)}}{dz^2} + \left[\frac{N_\infty^2}{gh_n^{(1)}} - \frac{1}{4H^2} \right] W_n^{(1)} = 0 \quad (4.33)$$

となる．この式の解は括弧の中の符号が負か正かによって指数関数的か正弦関数的となる．負の場合，すなわち $h_n^{(1)} < 0$ または $h_n^{(1)} > 4H^2 N_\infty^2 / g = 4\kappa H T_\infty / T_s$ ならば，減衰解

$$W_n^{(1)} \propto \exp \left(- \left[\frac{1}{4H^2} - \frac{N_\infty^2}{gh_n^{(1)}} \right]^{1/2} z \right) \quad (4.34)$$

が当然選択されるべきとなり，これより $z = z_{\text{upper}}$ での上方境界条件を設定することができる．式 (4.14a), (4.17a), (4.18a) と $\rho_0 \propto e^{-z/H}$ を用いると，単位体積当たりの平均波エネルギー $\frac{1}{2} \rho_0 (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{\Phi'^2} / N^2)$ がこの解と共に減衰すると示せる⁴¹⁾．正の場合，すなわち $0 < h_n^{(1)} < 4H^2 N_\infty^2 / g$ ならば，伝播解

$$W_n^{(1)} \propto e^{imz}, \quad (4.35a)$$

$$m = \pm \left[\frac{N_\infty^2}{gh_n^{(1)}} - \frac{1}{4H^2} \right]^{1/2} \quad (4.35b)$$

が存在することになる．ただし， m は鉛直波数である．単位体積当たりの波のエネルギーは m の正負に関わらず z に依存しない．そこで，放射条件に従い m の正負は群速度の鉛直成分 $c_g^{(z)} \equiv \partial \omega / \partial m$ が正になるように決めなければならない．ただし， $\omega = 2\Omega\sigma$ は周波数である．よって，式 (4.35b) より，

$$\begin{aligned} c_g^{(z)} &\equiv \frac{\partial \omega}{\partial m} \\ &= 2\Omega \frac{\partial \sigma}{\partial m} \\ &= 4\Omega m \frac{\partial \sigma}{\partial m^2} \\ &= 4\Omega m \left(\frac{\partial \sigma}{\partial h_n^{(1)}} \right) / \left(\frac{\partial m^2}{\partial h_n^{(1)}} \right) \\ &= -4\Omega m \left(\frac{\partial \sigma}{\partial h_n^{(1)}} \right) / \left(\frac{N_\infty^2}{gh_n^{(1)2}} \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

⁴¹⁾ 証明は C.5 節参照．

となる。つまりは、 m の符号は $-\partial\sigma/\partial h_n^{(1)}$ と同じとなる。

図 17 より、正の h での自転と逆方向の位相速度において $\partial\sigma/\partial h_n^{(1)} > 0$ となるので、 m は負の符号を選べばよいと分かり、これより上方境界条件を設定することができる。

全く同様に $w^{(2)}$ についても考察できる⁴²⁾。

⁴²⁾ この詳細については Chapman and Lindzen (1970) で述べられている [2].

第 5 章

まとめ

この論文では、SR の維持メカニズムに関する論文である Horinouchi et al. (2020) のレビューと、その過程で必要となった TEM 方程式と熱潮汐波に関する講読内容をまとめた。まず TEM 方程式とは、東西平均操作を行うときに単純な東西平均ではなく、熱的な効果も加味した子午面循環である残差循環を用いた方程式系のことだということが分かった。また、この方程式系を使うことでポテンシャル渦度の役割が強調されて渦の効果が考えやすくなることも理解した。そして熱潮汐波とは、太陽加熱によって励起される波であり、自転によって最加熱点が移動することで自転と逆方向に伝播する波であるということも学んだ。この波は金星では東向き角運動量(自転逆向き)を持ち、それを中緯度に輸送していることが分かった。VIRA やあかつきの UVI, LIR などのデータを用いて金星の SR の維持プロセスについて調査を行った論文である Horinouchi et al. (2020) では、TEM 方程式を用いて、熱潮汐波や残差循環、乱流等の SR への寄与を調べ、その中で熱潮汐波が SR の加速という重要な役割を担っていることを明らかにされた。しかしながら、Horinouchi et al. (2020) の子午面循環は南北構造が単純化された非断熱加熱をもとに割り出されたモデルのため、子午面循環の寄与が本当に得られた通りなのかという問題点がある。他には、あかつきの IR2 から得られた下部から中部雲層の風の信頼性の高いデータが得られず解析に用いることができなかったため、下部から中部雲層の影響をあまり考えられていないという点についても考えなくてはならない。今後の課題としては、まずは Horinouchi et al. (2020) を読み進め、SR の維持メカニズムについて理解していく。その後、金星について分かっていることを精査し、今後どのようなことを研究していくかについて考えていくつもりである。

謝辞

本論文の執筆にあたり，指導教員の石渡正樹教授には丁寧なご指導とアドバイスを頂きました。このことについて，深く感謝申し上げます。また，地球流体力学研究室を含む惑星宇宙グループの教員の方々や先輩方，同期の皆様からも助言や励ましの言葉を頂きました。そして，家族や友人からも励ましの言葉を頂きました。重ねて，本卒業論文の製作にあたって松岡亮氏の L^AT_EX スタイルファイルを使用させて頂きました。関わってくださった皆様に心からの感謝の意を表します。

付録 A

Horinouchi et al. (2020) の全訳

この付録では, Horinouchi et al. (2020) の全訳を載せる [5].

どのようにして波や乱流が金星大気のスーパーローテーションを維持しているか

(Horinouchi et al., How waves and turbulence maintain the super-rotation of Venus' atmosphere. 2020, Science, 368, 405-409)

概要

金星は, その表面よりも 60 倍早い回転をする大気を持っている. その現象はスーパーローテーションとして知られている. 我々は, 回転の早さが最も速い金星の雲の層でスーパーローテーションがどのように維持されているか調査するために, 金星を周回しているあかつきという宇宙探査機からのデータを用いた. 熱的に誘起された緯度-高度循環は, 回転軸周りの角運動量分布を一様化するように働いている. スーパーローテーションの維持には, その一様化の効果に対抗して, 大気の波や乱流の効果が必要である. それらの影響のうち, 熱潮汐波は角運動量を輸送していて, それらは低緯度の雲の最上層の近くで回転のピークを維持している. 他の惑星スケールの波や大規模乱流はその逆方向に働いている. 我々は流体力学的不安定が中緯度での角運動量分布を調節していることを提案する.

本文

金星の厚い大気は、自転が遅い金星の速度の 60 倍の速さで回転している。金星表面は西向きに 243 日で回転している（この文章中では、1 日というのは地球の 1 日を指す）。スーパーローテーション (SR) の維持メカニズムは、未だ明らかにされてはいない (Sánchez-Lavega et al. 2017, Read and Lebonnois 2018)。これは仮説検証のための観測的証拠が不十分であることが理由の一つである。

SR は潮汐固定されている系外惑星でも起きうる。それらの天体は、公転する恒星に対して常に同じ面を向けていて、それ故に片側のみしか熱されていない。SR を含む、回転軸周りの東西流はそれらの天体の昼側から夜側に熱を輸送することが可能である (Showman and Polvani 2011)。

SR は、回転軸周りの大気の角運動量 (AM) が波や乱流のような軸的に非対称な流れ (渦) によって移動しない限り起きない。それらがなければ、単位質量当たりの AM は極-赤道間の温度差によって起きる緯度-高度循環 (子午面循環) によって均質化される (Hide 1969)。観測からの AM 輸送の推測が、Mariner 10 (Limaye and Suomi 1981) や Pioneer Venus Orbiter (Rossow et al. 1990, Limaye 2007) などの探査機によって撮られた雲の最上層 (65-70km の高度にある) の写真の特徴を追うことによって試みられた。しかし、そのサンプリングによる証明は時間的にも空間的にも不十分なものであった。

大気大循環モデルを用いたシミュレーションでは、SR が生成されている (Yamamoto and Takahashi 2003 (8), Takagi and Matsuda 2007 (9), Lee et al. 2007 (10), Lebonnois et al. 2010 (11), Sugimoto et al. 2014 (12), Lebonnois and Sugimoto 2016 (13), Mendonça and Read 2016 (14), Sugimoto et al. 2019 (15))。それらのシミュレーションは、SR は潮汐波 (9, 11, 13, 14) やほかの波 (8, 10-15) を介した AM 輸送によって実現されることを示した。それらの波のいくつかは流体力学的不安定 [例えば順圧 (10, 12-14) や傾圧 (12, 13, 15), ロスビー-ケルビン不安定 (14) など] や乱流の渦 (15) によって起こる。それらの効果それぞれの寄与度は、モデルごとに異なる。

AM の収支は次の式で記述できる。この式は気象学の分野では、Transformed Eulerian Mean (TEM) 方程式として知られている。

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\mathbf{v}^r \cdot \nabla M + \rho_0^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (1)$$

ただし、 M は単位質量あたりの帯状平均 (同緯度円上の平均) AM (SR は西方向で負)、 $\mathbf{F}$ は、Eliassen-Palm フラックスと呼ばれる AM の流束の符号を変えたもの、 $\mathbf{v}^r \equiv (0, v^r, w^r)$ は子午面循環の平均速度で残差循環と呼ばれている。 v^r は北方向の速度、 w^r は鉛直方向の速

度である⁴³⁾(16). 上の方程式は, 定常状態では渦による AM の輸送量 $\rho_0^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}$ と子午面循環による AM の輸送量 $-\mathbf{v}^r \cdot \nabla M$ が釣りあっている. 金星では, $|M|$ が赤道付近の雲の最上層の高度で最大に到達している (Schubert et al. 1980, Kerzhanovich and Limaye 1985). この最大の AM の維持にはそこへの渦による AM の輸送が必要となる.

我々はまず, 平均子午面循環とその効果に関する調査を行った. 風の観測から直接循環を測定することは地球の大気でさえ難しい. 金星では, 最も信頼できる推定は, 太陽放射と熱放射の観測に基づくものであり, それは我々が構築したモデルから得られた (16). w^r と v^r の結果は赤道域の雲上層での数ミリメートル毎秒の上昇と, 中緯度帯の雲上部付近での $\sim 1\text{ms}^{-1}$ の極方向の流れをそれぞれ示した. 我々は理想的な帯状風 (東方向の速度成分) 構造をモデルに導入した. 赤道付近の雲の層の上昇流は AM のピークが存在する赤道付近の雲の上層域の SR を $\sim 1\text{ms}^{-1}\text{day}^{-1}$ で減速させるように働いている. それは渦による加速によって補われるべきである.

⁴³⁾ 元々の文では, w^r は westward velocity と書いてあるが, おそらく鉛直方向の間違いであると思われる.

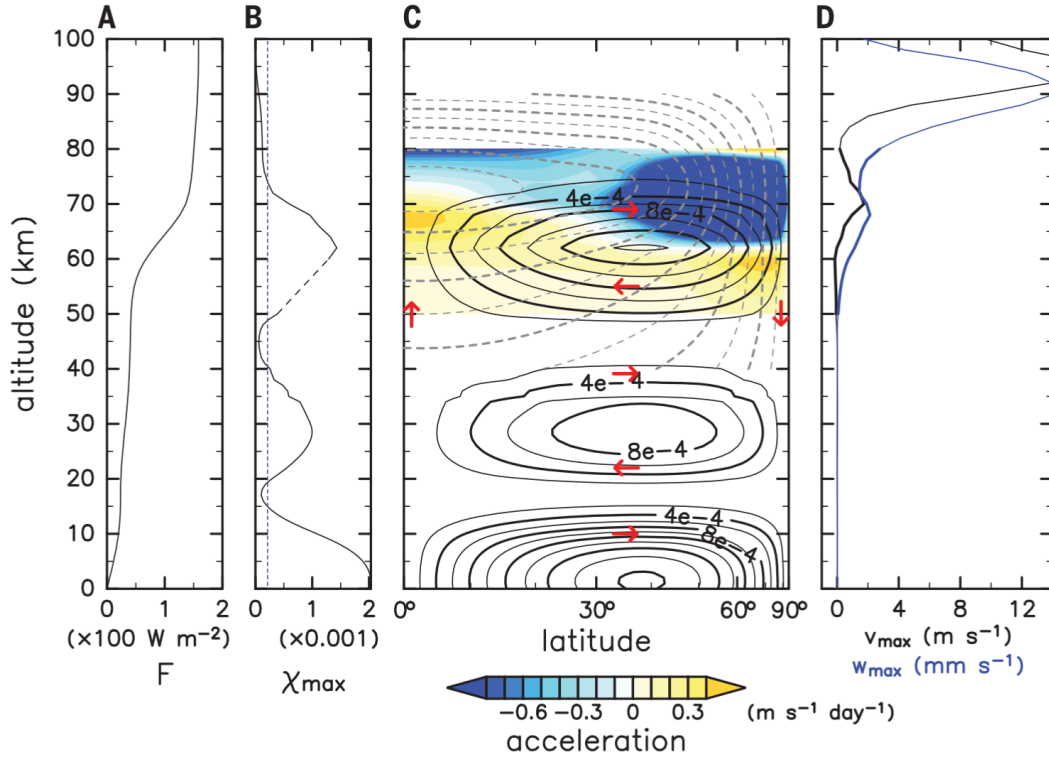


図 19: 太陽加熱から得られた子午面循環の理想モデル計算と理想化された帯状角運動量の移流による加速. (A) は下向きの全球平均太陽放射フラックス F . (B) は $\varphi_{\max} = 38.2^\circ$ での太陽加熱から得られた質量流線関数 χ である⁴⁴⁾. 破線は補間した領域を, 青い点線は高度 74km での値を示している. (C) では, 黒い等値線が χ の半球構造を (流れる方向は赤い矢印で概略的に示されている), 灰色の破線の等値線は高度 40km から 90km の間の理想的な M を, 色のグラデーションは高度 50km から 80km の間での移流による帯状流の加速 $-(a \cos \varphi)^{-1} \mathbf{v}^r \cdot \nabla M$ を示している. (D) では, 黒い線は $\varphi_{\max}$ での v^r を, 青い線は赤道での w^r を示している. また, 太い線は高度 50km から 80km の間の値を強調している. 原図は Horinouchi et al. (2020) の図 1 である. また, この図は本文の図 5 と同じである.

中緯度から高緯度帯では, $\sim 65\text{km}$ より上では $-\mathbf{v}^r \cdot \nabla M$ の項による減速が, その下では加速が起きている. 我々は, 循環によって必然的に生じる流体力学的不安定がそれらの減速加速を補うと予期し (Iga and Matsuda 2005, Takagi and Matsuda 2006), 我々は中緯度から高緯度帯での AM 分配が多かれ少なかれ自発的に起こるだろうと推測した.

⁴⁴⁾ この $\varphi_{\max}$ は未定義である.

我々はさらに、金星探査機のあかつきから得られたデータを用いて制約条件を見出した。我々は 2015 年 12 月と 2018 年 12 月の間のデータを分析した。その期間は 5 つに分けられていて、それぞれ開始日が 2015 年 12 月 7 日, 2016 年 9 月 21 日, 2017 年 4 月 21 日, 2017 年 12 月 1 日, 2018 年 6 月 16 日で、その終了日は 2018 年 12 月 7 日である。データの品質管理を行い雲を追跡する方法を用いて (Ikegawa and Horinouchi 2016, Horinouchi et al. 2017), 我々はあかつきの Ultraviolet Imager(UVI)(Yamazaki et al. 2018) の 283nm と 365nm のものを用いて風分布の推測を行った。我々は雲の上層付近の 1000km 四方の領域における水平速度を 4 時間の時間解像度で求めた (16)(不確実性は図 7A に示されている)。283nm での結果は、365nm での結果よりもわずかに (おそらく数キロメートルほど) 高い高度の風をとらえている (Horinouchi et al. 2018)。

Eliassen-Palm フラックスの南北成分 F_y は、おそらく $f_{yv} \equiv -\langle u^* v^* \rangle \cos \varphi$ の項に支配されている。ただし、 u, v はそれぞれ東西風と南北風を示し、角括弧とアスタリスクはそれぞれ東西平均とそれからの偏差を表す。我々は、地方時 τ_L 、緯度 φ 、時間 t にもとづく座標系を用いた。ただし、地方時 τ_L は対日点を基準に 0 から 24 時を緯度に割り当てて定義されている。この系で時間的に平均化した風 $(\bar{u}, \bar{v})$ は、時間的にかつ東西方向に平均化した風 (u_0, v_0) と熱潮汐に関連付けられた流れ (u_t, v_t) で構成されている。3 年のデータからの平均風は図 7 に示されている。

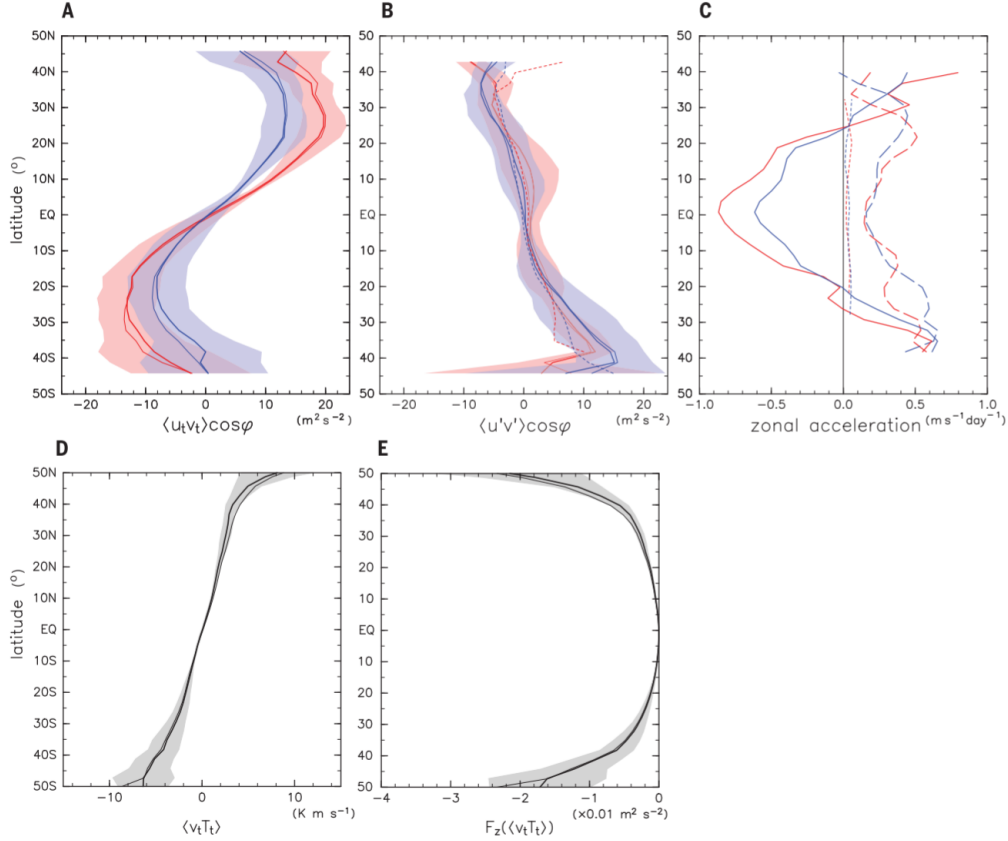


図 20: 雲頂での熱潮汐波と時間変化する乱流による子午面 AM フラックスとその発散, そして潮汐熱フラックス. (A) 2 ~ 5 番目の期間で $\langle u_t v_t \rangle \cos \varphi$ を平均することで得られた平均潮汐フラックス (太線: 赤は 283 nm の場合; 青は 365 nm の場合を示す). 1 番目の期間が除かれているのは, 地方時の範囲が u_0 を推定するには短すぎるためである. 影領域は各期間における標準偏差を示す. 細実線は期間全体の結果を示す. (B) (A) と同様だが, 5 つの期間から得られた $\langle u' v' \rangle \cos \varphi$. u' と v' の間の誤差共分散に起因する偏りは取り除かれている. 点線は, 日平均風 ($u^\#, v^\#$) から得られたフラックスである. (C) (A) と (B) における, 熱潮汐波の加速量 ($-\frac{\partial \langle u_t v_t \rangle \cos^2 \varphi}{a \cos^2 \varphi \partial \varphi}$; 実線) と時間変化する乱流 ($-\frac{\partial \langle u' v' \rangle \cos^2 \varphi}{a \cos^2 \varphi \partial \varphi}$; 破線) の子午面 AM フラックス収束による帯状加速量. 点線は緯度方向に 1:2:1 の平滑化⁴⁵⁾を行った後の共スペクトルから得られたロスビー波の加速量である. 色は (A) と同様である. (D) 5 つの期間における, 365nm で得られた v_t を用いた $\langle v_t T_t \rangle_1$ から得られた昼側潮汐による平均潮汐熱フラックス (太実線)⁴⁶⁾. 影領域は各期間における標準偏差を示す. 細実線は期間全体から得られたものである. (E) (D) と同様だが, $f_z T_1 \equiv \zeta_a S^{-1} \langle v_t T_t \rangle_1 \cos \varphi$ の場合である (図 7 B の絶対渦度と安定性 $S = 8 \times 10^{-3} \text{Km}^{-1}$ を用いている). 原図は Horinouchi et al. (2020) の図 2 である. また, この図は本文の図 12, 16 と同じである.

我々は、各期間の UVI 画像の観測により得られた $(\bar{u}, \bar{v})$ から、モデルから推定された (u_0, v_0) を引くことによって (u_t, v_t) を推定した (16). その結果得られた潮汐 AM フラックス $\langle u_t v_t \rangle \cos \varphi$ は図 12A で示されている. 得られた潮汐 AM フラックスは、北半球 (南半球) で正 (負) である. このことより、両半球にて赤道方向への西向き AM 輸送が起きていることが示された. 異なる期間における我々の結果の一貫性は (図 12A), 我々の推測の確からしさを論証するものとなっている. 潮汐子午面 AM フラックス収束は南緯 20 度と北緯 20 度の間の SR を加速させる. これはピーク値にして、365 nm (283 nm) の場合において -0.6 (-0.9) $\text{ms}^{-1}\text{day}^{-1}$ もの値となっており、これは西向きの SR の加速をもたらしている (図 12C). この推論は u_0, v_0 によっている. そこで、我々は推論の確からしさを確かめるため感度研究を行った (16)(図 10, 図 11) もの、いくつかの不確かさが残っている (16). 熱潮汐波は東方向の AM を輸送しており⁴⁷⁾, そのため我々の結果は、低緯度で大きい太陽加熱による、潮汐波生成における作用反作用の法則と矛盾していない.

我々は次に、熱潮汐波ではない時間変化する運動による AM 輸送を調査した. 我々は $(u', v') \equiv (u - \bar{u}, v - \bar{v})$ を用いた. ただし、 $(\bar{u}, \bar{v})$ は、ある τ_L, φ における (u, v) の ± 15 日での平均値である. 図 12B では、 u' と v' の誤差共分散を用いて誤差の分散の効果を取り除いた AM フラックス $\langle u' v' \rangle \cos \varphi$ (実線) が示されている (16)(図 9). 誤差の分散を取り除く前では、誤差共分散が AM フラックスを 1.5 倍に増幅していた. しかしながら、この効果は $\langle u^\# v^\# \rangle \cos \varphi$ に対してとても小さい (16)⁴⁸⁾. ただし、 $(u^\#, v^\#)$ は各 τ_L, φ における日平均によって滑らかにされた (u', v') である. UVI は決まって各日の 16 時間ほど動作するため、日平均をとることは SR の影響で数千キロメートルにわたって風を平均することに対応する.

得られた AM フラックス (図 12B) は熱潮汐波によって生まれるものと反対向きである (図 12A). 各期間の一貫性がまたもや我々の方法の確からしさを示した⁴⁹⁾. 潮汐の場合とは違って、両方の波長で定量的に一貫した結果が得られ、それは潮汐加速よりも弱い SR の

³⁾ 1:2:1 の平滑化とは、ある座標と隣接座標に対して 1:2:1 の重みを用いた平滑化を指していると思われる.

⁴⁶⁾ $\langle v_t T_t \rangle_1$ の添え字の 1 は意味不明である.

⁴⁷⁾ 太陽直下点では大気の温度が上昇し、大気の膨張が起きる. すると、そこから周囲への圧力傾度力が発生する. この領域が自転逆向き (東方向) に移動するため、結果的に熱潮汐波は東向き AM を持つと考えられる.

⁴⁸⁾ 元々はこの後に、「ただし、 $(u^\#, v^\#)$ は各 τ_L, φ における日平均によって滑らかにされた (u', v') である.」とあったが、意味が不明だったので削除している. $u^\#$ は日平均値、 $u' = u - \bar{u}$ であり、定義が全く違う. → おそらく解決

第 2 章や Horinouchi et al. (2020) の Supplementary Materials に詳しく載っている.

⁴⁹⁾ この根拠がよく分からない.

減速を示唆している (図 12C). $(u^\#, v^\#)$ によって計算された AM フラックスは, (u', v') によって計算された AM フラックスよりわずかに弱い. これは, AM フラックスの小さい摩擦が高周波数帯 (2 日よりも短い期間) か, 小さいスケールで存在することを示唆している⁵⁰⁾.

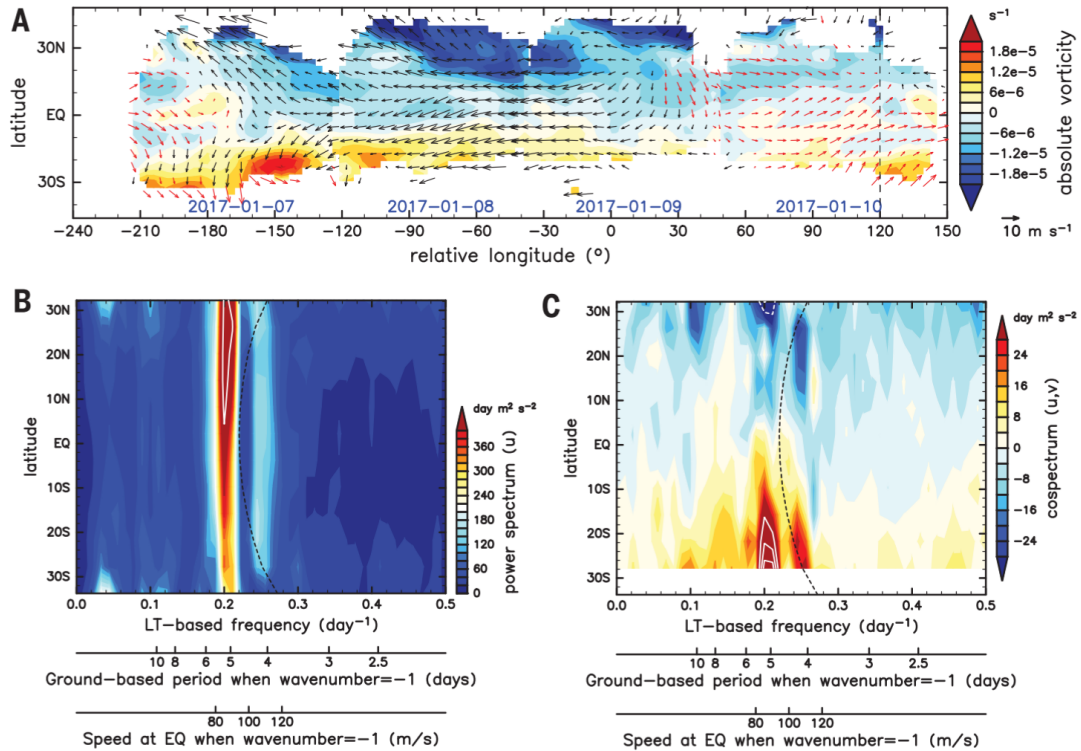


図 21: 風の擾乱場の例 (365nm) と対応するスペクトル. 2017 年 1 月 7 日から 10 日までの期間での風の時間変動成分 ($u^\#, v^\#$) (矢印; $u^\# > 0$ ならば赤である) と絶対渦度 (色のトーン). 一日当たり 90 度ずつずらして重ねている. (B) 2 ~ 4 番目の期間で $u^\#$ のパワースペクトル (色のトーン; 白い等値線は $500 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ day}$). 横軸には, ある地方時 (LT, τ_L : 対応する地面を基準とした時間. 単位は day) で観測された振動数と, 乱流の帯状波数が 1 であり西方向に動くときの赤道 (EQ) での帯状伝播速度の両方が示されている. (C) (B) と同様だが, $u^\#$ と $v^\#$ 共スペクトルの場合である (白い等値線は $20 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ day}$ 間隔である). 原図は Horinouchi et al. (2020) の図 3 である. また, この図は本文の図 13 と同じである.

次に, 我々は時間変化する乱流の性質と AM 輸送におけるその役割を考えた. 図 13A で

⁵⁰⁾ 本当に示唆している ???

は, $(u^\#, v^\#)$ を用いた乱流の空間的分布と, $(u^\# + \tilde{u}, v^\# + \tilde{v})$ を用いて計算された絶対渦度の例を示している. 1 日に 90 度ずつ経度方向にずらした平均操作を行う. これにより SR による移流の効果をおおむね取り除くことができる. さらなる例は図 23, 24 に示されている. 日を跨ぐような滑らかな変化は全体的な時間変化が遅いことを示している. $u^\#$ の分布は, 様々な帯状波数 (経度方向のラジアン単位での波数) の中で波数が 1 の波 (すなわち一つの波が緯円を満たしていて, これはロスビー波と一致している. Kouyama et al. 2013, Imai et al. 2019 参照) が支配的であることを示唆している. 得られた $u^\#$ のパワースペクトルは図 13B に示されている. これは, 振動数 0.2day^{-1} 付近 (地面基準時で 5.2day 周期) で最大に達している. 位相が $\pi/2$ 遅れて発生するクロススペクトルの虚部 (図 14C) もまたロスビー波構造と一致する. 図 13B の 0.24day^{-1} の部分 (地面を基準とする時間で 4day に対応している) に表れた 2 番目のスペクトルのピークは, ケルビン波と一致する. (Kouyama et al. 2013, Imai et al. 2019). 赤道から離れる $v^\#$ における同等のシグナル (図 14B) は, 純粋なケルビン波を含まないずれが示されている.

波に加えて, 乱流のような動きが図 13A (そして, 図 23) に表れている. 北緯 30 度付近の絶対渦度の非単調な変化は, 乱流を発生させるような大きな動きを示している. 曲がりくねった (多くは赤道を超える) 流れは, 絶対渦度勾配が不連続に変化する赤道では強い. そしてこの流れはロスビー波の単純な重ね合わせでは表現しがたい. それらの流れは重力波にも似ていない. すなわち, 我々はいくつかの部分における一時的な風の不安定は水平方向の乱流によって起こると結論付けた.

$u^\#$ と $v^\#$ のクロススペクトルの実部よりある周波数における相互相関を取り除くことができる (図 13C). 共スペクトルの振動数依存性は, 北緯 20° 以北と南緯 20° 以南でおおよそ似通っていた. 二つのランダムなシグナルの共スペクトルは正か負に等しく確からなかった. そのため, このことは偶然の一致やノイズでは説明できない. 共スペクトルより, ロスビー波周期 (周波数が $0.1888\text{--}0.2222\text{ day}^{-1}$) の子午面 AM フラックスへの寄与と計算された (図 12C). 少なくとも南緯 30 度と北緯 30 度の間では, これはただの AM 輸送の小さい摩擦である. ケルビン波の寄与はさらに小さい. したがって我々は広範な周波数にわたる鉛直乱流は (波と一緒に) SR を減速させている. この考えは, 乱流の AM 輸送が SR を加速させているというかつての予測 (子午面循環の AM 輸送と乱流の AM 輸送が互いにバランスするいわゆる古典的ギーラッシュ-ロスビー-ウィリアムズ機構) と逆である (1, 27, 28).

我々は $\mathbf{F}$ の鉛直成分 $F_z \propto f_{zw} + f_{zT}$ (f_{zw}, f_{zT} はそれぞれ $\langle u^* w^* \rangle, \langle v^* T^* \rangle$) に比例し

ている (16)) に関するさらなる調査を行なった。ただし、 w は鉛直速度である。我々はあかつきの中間赤外カメラ (LIR) から得られた輝度温度より、熱潮汐波の日周成分 (すなわち東西波数 1) による子午面熱フラックス $\langle v_t T_t \rangle \propto f_{zT}$ を推定した (16)。これより潮汐熱フラックスは極方向であることが示された (図 16D)。中緯度帯から高緯度帯では日周潮汐はロスビー波によって支配される (29)。理論的にはロスビー波の F_z 成分は f_{zT} が支配的であるため、日周潮汐熱フラックスの推定結果は鉛直下方への波による負の AM 輸送を示している (図 16E)。中緯度ではその典型的な大きさは $1 \times 10^{-2} \text{m}^2 \text{s}^{-2}$ である。これより推定される加速は $\sim 0.1 \text{ms}^{-1} \text{day}^{-1}$ であるため (この値は潮汐的に励起された f_{zT} の鉛直収束が 10km 以上の高さスケールで起こる場合のものである)、この効果は小さいといえる。

全ての熱潮汐波の半日周成分 (すなわち東西波数 2) と低緯度での日周潮汐の一部は重力波により支配される (29)。それらは AM をその勾配上方に輸送すると予期されている (9, 30)。それは f_{zw} に支配されており鉛直速度を含むため、重力波と関係している F_z の観測的推定は行えない。我々は代わりに大きさのオーダーの推定を行ない (16), $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ に関連付けられた加速が $\sim 1 \text{ms}^{-1} \text{day}^{-1}$ かそれより小さいと分かった。それゆえ、潮汐鉛直 AM 輸送は低緯度での SR の加速に水平輸送と同じ程度に寄与しうる。

あかつきのデータによって、熱潮汐波・惑星規模のロスビー波・他の時間変化する擾乱による水平 AM 輸送の推定ができた。熱潮汐波は西方向の AM を赤道方向に輸送し、子午面循環による均一化に対抗して SR を維持している。他の運動は低緯度では逆方向に働いている。我々は熱潮汐波による鉛直 AM 輸送も推定した。雲層での SR の維持を決定づける AM バランスは図 22 で概略的に説明されている。

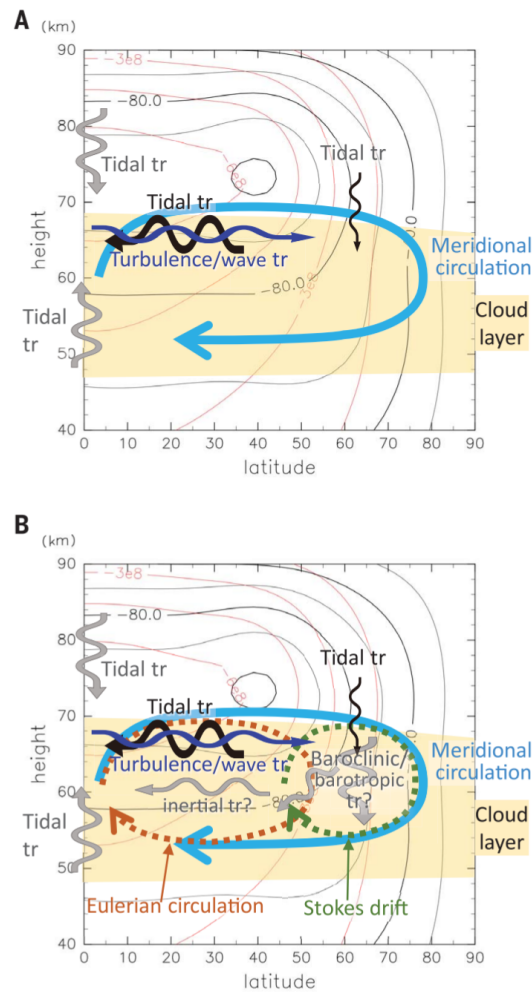


図 22: 金星の雲層における提案された AM バランスの概略的説明. (A) この研究で求められたか推定されたプロセス. (B) (A) と同様だが, 我々の提案する説明が増えている. 波打った矢印は SR の負の AM の渦輸送を示す. それらには, 我々が求めたか推定した輸送プロセスには tr というラベルがつき, (B) ではこの論文で提案された輸送プロセスには tr? というラベルを付けてある. それらの太さは大まかに, AM 輸送に対する相対的な寄与を表す. シアンの曲がった矢印は AM を均一化させるように働く平均子午面循環を示す. 曲がった点線は循環に対する予期された寄与である (16). 背景は雲層 (ペールオレンジの部分) と, 理想化された $\langle u \rangle$ (黒の等値線, $[\text{m/s}]$) $\cdot M$ (赤の等値線, $[\text{m}^2/\text{s}]$) の分布を示す. 原図は Horinouchi et al. (2020) の図 4 である.

我々は, SR の維持メカニズムは非古典的ギーラッシュ-ロッソー-ウィリアムズシナリオのものである (1). これは古典的なものに潮汐波による AM 輸送を含めて拡張させたも

のである．

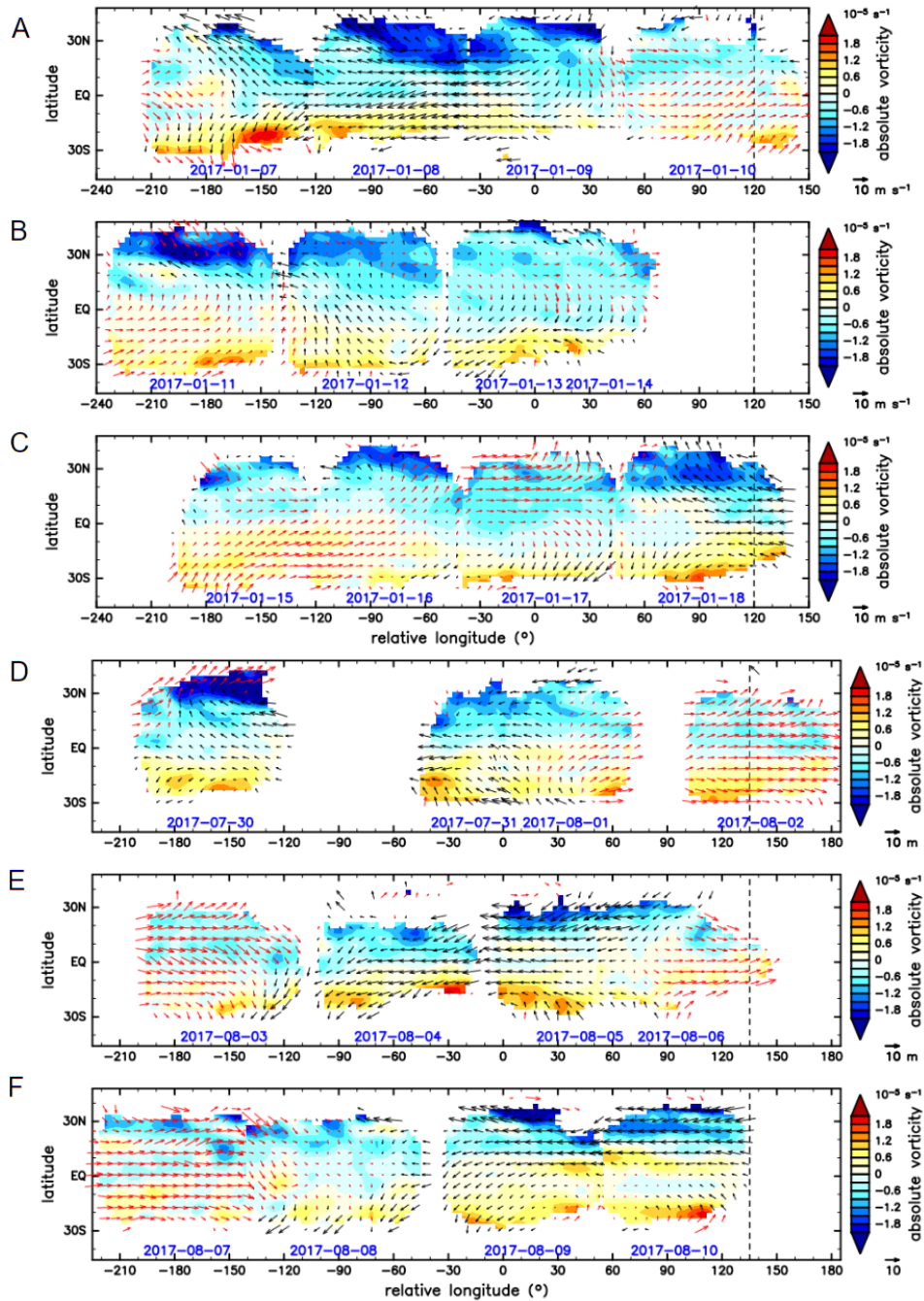


図 23: 非定常風擾乱の空間分布および時間発展の例。(A-C) 2017 年 1 月 7 日–18 日および (D-F) 2017 年 7 月 30 日–8 月 10 日にわたる日平均非定常風 ($u^\#, v^\#$) ($u' > 0$ の場合ベクトルは赤色で着色; 右下余白に m s^{-1} 単位でスケールを表示). 絶対渦度 (色のトーン). 経度は τ_L に基づいており, 1 日あたり 90° ずらされている. 左端から 360° の位置を示すために鉛直な点線が示されている. 原図は Horinouchi et al. (2020) の Supplementary Materials の図 S6 である.

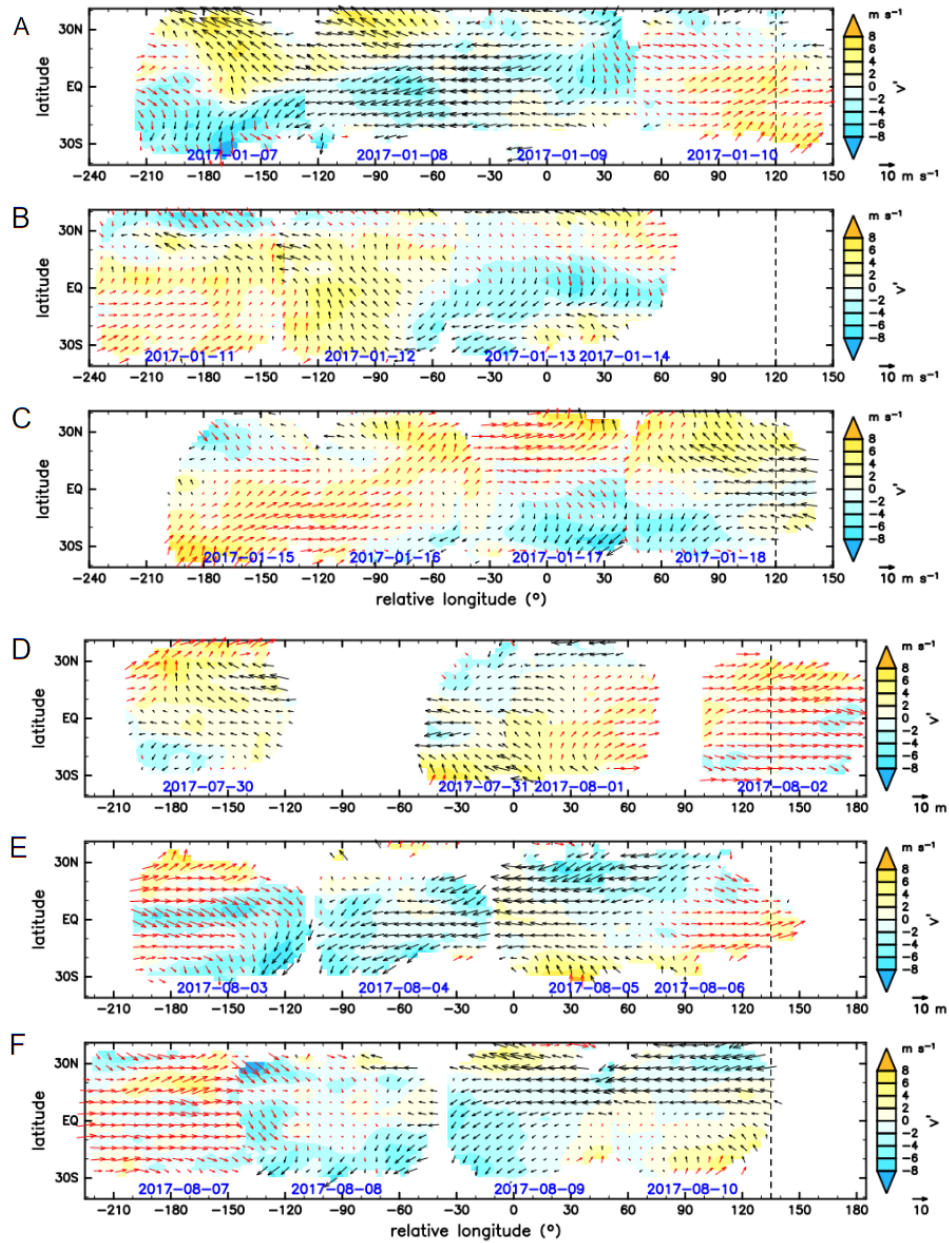


図 24: 非定常風擾乱の空間分布および時間発展の例．図 23 と同様だが、 $v^{\#}$ についてである．原図は Horinouchi et al. (2020) の Supplementary Materials の図 S7 である．

付録 B

補足：TEM 方程式

この付録では Andrews et al. (1987) と Vallis (2006) を参考に TEM 方程式についてまとめている [1, 17].

B.1 式 (3.1) の導出

この節では、式 (3.1) の導出を行う。

Andrews (1987) での最初の方程式を導出する。出発する方程式系は以下のナビエ-ストークス方程式である。

ここでは、ある惑星上において、東西方向、南北方向、鉛直方向を (x, y, z) とする直交座標系を用いる。それぞれ、東方向、北方向、鉛直上方が正である。このとき、天体の自転角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は、緯度 φ を用いて $\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi)$ と表せられる。

$$\rho_0 \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \right) = -\nabla p - \rho_0 \nabla \Phi + \rho_0 \mathbf{F}, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{1}{T} \dot{Q}. \quad (\text{B.3})$$

この式は連続の式以外は、Vallis (2006) での導出の初めの部分と同じで、密度が参照密度になっているものである。変数はそれぞれ、 $\rho_0(z)$ は参照密度、 $\mathbf{v}$ は流体の速度、 p は圧力、 Φ

は重力ポテンシャル, η は比エントロピー (単位質量当たりのエントロピー), T は温度, $\dot{Q}$ は単位質量あたりの加熱率, $\mathbf{F} = (X, Y, Z)$ は摩擦項である.

まずは, 座標系を変えていく. 水平方向には, 緯度と経度 (φ, λ) をとる. 鉛直座標は, 地表面気圧 p_s を用いて,

$$z \equiv -H \ln(p/p_s) \quad (\text{B.4})$$

を用いる⁵¹⁾⁵²⁾. それぞれのスケール因子 $(h^{(\lambda)}, h^{(\varphi)}, h^{(z)}) = (a \cos \varphi, a, 1)$ を用いて, 勾配と発散について考える. ただし, a は惑星半径である.

すると, あるスカラー量 f , ベクトル量 $\mathbf{A} = (A^{(\lambda)}, A^{(\varphi)}, A^{(z)})$ を用いて, 勾配と発散は

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{1}{h^{(\lambda)}} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{1}{h^{(\varphi)}} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{1}{h^{(z)}} \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{h^{(\lambda)} h^{(\varphi)} h^{(z)}} \left(\frac{\partial [h^{(\varphi)} h^{(z)} A^{(\lambda)}]}{\partial \lambda} + \frac{\partial [h^{(\lambda)} h^{(z)} A^{(\varphi)}]}{\partial \varphi} + \frac{\partial [h^{(\lambda)} h^{(\varphi)} A^{(z)}]}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \left(\frac{\partial [a A^{(\lambda)}]}{\partial \lambda} + \frac{\partial [a \cos \varphi A^{(\varphi)}]}{\partial \varphi} + \frac{\partial [a^2 \cos \varphi A^{(z)}]}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial A^{(\lambda)}}{\partial \lambda} + \frac{\partial [\cos \varphi A^{(\varphi)}]}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial A^{(z)}}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

と表せる.

ただし, これからは, λ, φ, z による偏微分を添え字によって示す.

そして, 惑星中心からの距離 r を用いて幾何学的高度 $z^* \equiv r - a$ を定義し, それを用いて静水圧平衡

$$\frac{dp}{dz^*} = -\rho_0 g \quad (\text{B.8})$$

を仮定する. ただし, 重力加速度 g は定数である.

まずは, 運動方程式の水平成分から始める. 式 (B.1) の各項について考える. 左辺第一項は, λ, φ, z 方向の単位ベクトル $\mathbf{e}^{(\lambda)}, \mathbf{e}^{(\varphi)}, \mathbf{e}^{(z)}$ を用いて,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{Du}{Dt} \mathbf{e}^{(\lambda)} + \frac{Dv}{Dt} \mathbf{e}^{(\varphi)} + \frac{Dw}{Dt} \mathbf{e}^{(z)} + u \frac{D\mathbf{e}^{(\lambda)}}{Dt} + v \frac{D\mathbf{e}^{(\varphi)}}{Dt} + w \frac{D\mathbf{e}^{(z)}}{Dt} \quad (\text{B.9})$$

⁵¹⁾ この式の逆関係式は,

$$p = p_s e^{-z/H} \quad (\text{B.5})$$

である.

⁵²⁾ 鉛直方向が, 距離ベースから圧力ベースに代わったが, 特に操作をしなくても導出自体はできた. だが, これでいいかは分らん. MAD には, 地表面付近以外ではその差はおおむね無視できるとある.

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbf{e}^{(\lambda)}}{Dt} &= \frac{D\lambda}{Dt}(-\cos\varphi \cdot \mathbf{e}^{(z)} + \sin\varphi \cdot \mathbf{e}^{(\varphi)}) \\ &= \frac{u}{a\cos\varphi}(-\cos\varphi \cdot \mathbf{e}^{(z)} + \sin\varphi \cdot \mathbf{e}^{(\varphi)}) \\ &= -\frac{u}{a}\mathbf{e}^{(z)} + \frac{u\tan\varphi}{a}\mathbf{e}^{(\varphi)},\end{aligned}\tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbf{e}^{(\varphi)}}{Dt} &= -\frac{D\varphi}{Dt}\mathbf{e}^{(z)} - \frac{D\lambda}{Dt}\sin\varphi \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)} \\ &= -\frac{v}{a}\mathbf{e}^{(z)} - \frac{u}{a\cos\varphi}\sin\varphi \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)} \\ &= -\frac{v}{a}\mathbf{e}^{(z)} - \frac{u\tan\varphi}{a}\mathbf{e}^{(\lambda)},\end{aligned}\tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbf{e}^{(z)}}{Dt} &= \frac{D\varphi}{Dt}\mathbf{e}^{(\varphi)} + \frac{D\lambda}{Dt}\cos\varphi \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)} \\ &= \frac{v}{a}\mathbf{e}^{(\varphi)} + \frac{u}{a\cos\varphi}\cos\varphi \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)} \\ &= \frac{v}{a}\mathbf{e}^{(\varphi)} + \frac{u}{a}\mathbf{e}^{(\lambda)}\end{aligned}\tag{B.12}$$

より⁵³⁾,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left(\frac{Du}{Dt} - \frac{uv\tan\varphi}{a} + \frac{uw}{a}\right)\mathbf{e}^{(\lambda)} + \left(\frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2\tan\varphi}{a} + \frac{vw}{a}\right)\mathbf{e}^{(\varphi)} + \left(\frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2}{a} - \frac{v^2}{a}\right)\mathbf{e}^{(z)}.\tag{B.13}$$

w より u, v が大きいとすると,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left(\frac{Du}{Dt} - \frac{uv\tan\varphi}{a}\right)\mathbf{e}^{(\lambda)} + \left(\frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2\tan\varphi}{a}\right)\mathbf{e}^{(\varphi)} + \left(\frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2}{a} - \frac{v^2}{a}\right)\mathbf{e}^{(z)}.\tag{B.14}$$

左辺第二項は、左辺第一項と同様に w より u, v が大きいとすると、

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} &= 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos\varphi \\ \Omega \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -fv \\ fu \\ 2u\Omega \cos\varphi \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{B.15}$$

⁵³⁾ 後で書く

右辺第一項は, z の定義より, z の値が等しいと圧力が等しいため, 圧力傾度力は 0 となる. よって, 式 (B.1) の水平成分は,

$$\frac{Du}{Dt} - \left(\frac{u \tan \varphi}{a} + f \right) v + \frac{\Phi_\lambda}{a \cos \varphi} = X, \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{u \tan \varphi}{a} + f \right) u + \frac{\Phi_\varphi}{a} = Y. \quad (\text{B.17})$$

次に, 式 (B.2) について考える. 左辺第一項は, ρ_0 が z のみによることを考えると,

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0. \quad (\text{B.18})$$

左辺第二項は, $\mathbf{v}$ の発散を考えると,

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = \frac{\rho_0}{a \cos \varphi} [u_\lambda + (v \cos \varphi)_\varphi] + (\rho_0 w)_z. \quad (\text{B.19})$$

よって, 式 (B.2) より,

$$\frac{u_\lambda + (v \cos \varphi)_\varphi}{a \cos \varphi} + \frac{(\rho_0 w)_z}{\rho_0} = 0. \quad (\text{B.20})$$

次に, 式 (B.3) について考える. まず, 熱力学第 1 法則より,

$$\bar{d}Q = dI + p d\alpha. \quad (\text{B.21})$$

ただし, Q は受け取った熱量, I は内部エネルギー, p は圧力であり, $\alpha \equiv \rho_0^{-1}$ である. 内部エネルギーは温度 T にしかよらないので,

$$dI = c_v dT. \quad (\text{B.22})$$

ただし, c_v は定積モル比熱である. $c_v = c_p - R$ と状態方程式 $p = \rho_0 RT$ (c_p : 定圧モル比熱, R : 気体定数) より,

$$\begin{aligned} \bar{d}Q &= c_v dT + p d\alpha \\ &= (c_p - R) dT + d(p\alpha) - \alpha dp \\ &= c_p dT - R dT + d(RT) - \alpha dp \\ &= c_p dT - \alpha dp. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$T d\eta = \bar{d}Q$ と状態方程式より,

$$\begin{aligned} T d\eta &= c_p dT - \frac{RT}{p} dp, \\ d\eta &= c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned}
&= c_p d(\ln T) - R d(\ln p) \\
&= c_p [d(\ln T) - \kappa d(\ln p)] ,
\end{aligned} \tag{B.25}$$

ただし, $\kappa = R/c_p$ であり, ある変数 x について, $d(\ln x) = dx/x$ である⁵⁴⁾.
 そして, 基準となる圧力を p_s とすると, 温位 θ について, 断熱過程では,

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0 \tag{B.28}$$

となることより, $\theta = T(p_s/p)^\kappa$ となるため⁵⁵⁾,

$$\begin{aligned}
\theta &= T \left(\frac{p_s}{p} \right)^\kappa , \\
\ln \theta &= \ln \left[T \left(\frac{p_s}{p} \right)^\kappa \right] \\
&= \ln T + \kappa \ln p_s - \kappa \ln p ,
\end{aligned} \tag{B.32}$$

$$\begin{aligned}
d(\ln \theta) &= \frac{\partial(\ln \theta)}{\partial(\ln T)} d(\ln T) + \frac{\partial(\ln \theta)}{\partial(\ln p)} d(\ln p) \\
&= d(\ln T) - \kappa d(\ln p) ,
\end{aligned} \tag{B.33}$$

となるため, 式 (B.33) より, 式 (B.25) は,

$$d\eta = c_p d(\ln \theta) . \tag{B.34}$$

54)

$$\ln x = \int \frac{dx}{x} \tag{B.26}$$

より, 両辺を x で微分し, 両辺に dx をかけると,

$$\begin{aligned}
\frac{d(\ln x)}{dx} &= \frac{1}{x} , \\
d(\ln x) &= dx/x
\end{aligned} \tag{B.27}$$

となる.

55) 温位 θ は, 断熱過程では保存されるので, 式 (B.24) より,

$$c_p \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p} . \tag{B.29}$$

両辺を地表面 (温度, 圧力が θ, p_s) からある高度 (温度, 圧力が T, p) まで積分して,

$$\begin{aligned}
c_p \ln(T/\theta) &= R \ln(p/p_s) , \\
\ln(T/\theta) &= \ln(p/p_s)^{R/c_p} .
\end{aligned} \tag{B.30}$$

つまり,

$$\theta = T(p_s/p)^\kappa \tag{B.31}$$

である.

c_p を定数として, これを時間微分すると,

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{c_p}{\theta} \frac{D\theta}{Dt} . \quad (\text{B.35})$$

式 (B.3) より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \dot{Q} &= \frac{c_p}{\theta} \frac{D\theta}{Dt} , \\ \frac{D\theta}{Dt} &= \frac{\dot{Q}}{c_p} \frac{\theta}{T} . \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

$p = p_s e^{-z/H}$ と温位の式より,

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\dot{Q}}{c_p} e^{\kappa z/H} = S_q . \quad (\text{B.37})$$

最後に, 重力ポテンシャルの z 偏微分について考える. 重力ポテンシャル Φ は定義より,

$$\Phi \equiv \int_0^{z^*} g \, dz^* . \quad (\text{B.38})$$

静水圧平衡, 状態方程式より,

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{z^*} \left(-\frac{1}{\rho_0} \right) \frac{\partial p}{\partial z^*} dz^* \\ &= - \int_{p_s}^p \frac{RT}{p} dp \\ &= -RT \int_{p_s}^p \frac{dp}{p} \\ &= -RT (\ln p - \ln p_s) . \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

よって,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\ln p)} = -RT = -R\theta e^{-\kappa z/H} . \quad (\text{B.40})$$

ここで, $z \equiv -H(\ln p - \ln p_s)$ より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial (\ln p)} &= \frac{\partial z}{\partial (\ln p)} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= -H \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

より,

$$\Phi_z = H^{-1} R\theta e^{-\kappa z/H} . \quad (\text{B.42})$$

ここまですとまとめると、

$$\frac{Du}{Dt} - \left(\frac{u \tan \varphi}{a} + f \right) v + \frac{\Phi_\lambda}{a \cos \varphi} = X, \quad (\text{B.43a})$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{u \tan \varphi}{a} + f \right) u + \frac{\Phi_\varphi}{a} = Y, \quad (\text{B.43b})$$

$$\Phi_z = H^{-1} R \theta e^{-\kappa z/H}, \quad (\text{B.43c})$$

$$\frac{u_\lambda + (v \cos \varphi)_\varphi}{a \cos \varphi} + \frac{(\rho_0 w)_z}{\rho_0} = 0, \quad (\text{B.43d})$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = S_q. \quad (\text{B.43e})$$

これで, Andrews et al. (1987) での基礎方程式を出せた. これは, 式 (3.1) に対応するものである.

B.2 式 (3.4) の導出

この節では, Andrews et al. (1987) にもとづき, 式 (3.4) の導出を行う.

出発する方程式は以下の式である.

$$\frac{Du}{Dt} - \left(\frac{u \tan \varphi}{a} + f \right) v + \frac{\Phi_\lambda}{a \cos \varphi} = X, \quad (\text{B.45a})$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{u \tan \varphi}{a} + f \right) u + \frac{\Phi_\varphi}{a} = Y, \quad (\text{B.45b})$$

$$\Phi_z = H^{-1} R \theta e^{-\kappa z/H}, \quad (\text{B.45c})$$

$$\frac{u_\lambda + (v \cos \varphi)_\varphi}{a \cos \varphi} + \frac{(\rho_0 w)_z}{\rho_0} = 0, \quad (\text{B.45d})$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = S_q. \quad (\text{B.45e})$$

ここからは, 式 (3.1) に対してオイラー平均をとっていく. 定義はあるスカラー量 f を用いて以下のように表される.

$$\bar{f}(\varphi, z, t) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(\lambda, \varphi, z, t) d\lambda. \quad (\text{B.46})$$

また擾乱は以下のように表される.

$$f' \equiv f - \bar{f}. \quad (\text{B.47})$$

まずは, 式 (3.1d) から変形していく. 各従属変数を平均場と擾乱場に分けて, その式に対して再度東西平均をとる.

$$(a \cos \varphi)^{-1} \left[(\bar{u} + u')_{\lambda} + \{(\bar{v} + v') \cos \varphi\}_{\varphi} \right] + \rho_0^{-1} \{ \rho_0 (\bar{w} + w') \}_z = 0, \quad (\text{B.48})$$

$$(a \cos \varphi)^{-1} (\bar{v} \cos \varphi)_{\varphi} + \rho_0^{-1} (\rho_0 \bar{w})_z = 0. \quad (\text{B.49})$$

$\bar{u}_{\lambda} = 0$ より, 式 (B.48) から式 (B.49) を引くと,

$$\begin{aligned} (a \cos \varphi)^{-1} \left[u'_{\lambda} + (v' \cos \varphi)_{\varphi} \right] + \rho_0^{-1} (\rho_0 w')_z &= 0, \\ (a \cos \varphi)^{-1} u'_{\lambda} + a^{-1} v'_{\varphi} - a^{-1} v' \tan \varphi + \rho_0^{-1} \rho_{0z} w' + w'_z &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

次に式 (3.1a) を変形していく. 各従属変数を平均場と擾乱場に分けて, その式に対して再度東西平均をとる.

$$\begin{aligned} \frac{D(\bar{u} + u')}{Dt} - \left\{ f + \frac{(\bar{u} + u') \tan \varphi}{a} \right\} (\bar{v} + v') + \frac{\bar{\Phi}_{\lambda}}{a \cos \varphi} &= X, \\ \frac{D\bar{u}}{Dt} - f\bar{v} - \frac{\tan \varphi}{a} (\bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}) &= \bar{X}. \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

ここで, 添え字 t でオイラー微分を表すと,

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= u_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)u \\ &= u_t + (a \cos \varphi)^{-1} u u_{\lambda} + a^{-1} v u_{\varphi} + w u_z \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

この式に対して各従属変数を平均場と擾乱場に分けて, 再度東西平均をとると,

$$\begin{aligned} \frac{D(\bar{u} + u')}{Dt} &= (\bar{u} + u')_t + (a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} + u') (\bar{u} + u')_{\lambda} + a^{-1} (\bar{v} + v') (\bar{u} + u')_{\varphi} + (\bar{w} + w') (\bar{u} + u')_z, \\ \frac{D\bar{u}}{Dt} &= \bar{u}_t + (a \cos \varphi)^{-1} \overline{u'u'_{\lambda}} + a^{-1} (\bar{v}\bar{u}_{\varphi} + \overline{v'u'_{\varphi}}) + \bar{w}\bar{u}_z + \overline{w'u'_z}. \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

つまり, 式 (B.51) は,

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + (a \cos \varphi)^{-1} \overline{u'u'_{\lambda}} + a^{-1} (\bar{v}\bar{u}_{\varphi} + \overline{v'u'_{\varphi}}) + \bar{w}\bar{u}_z + \overline{w'u'_z} - f\bar{v} - \frac{\tan \varphi}{a} (\bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}) &= \bar{X}, \\ \bar{u}_t + a^{-1} \bar{v}\bar{u}_{\varphi} + \bar{w}\bar{u}_z - f\bar{v} - \frac{\tan \varphi}{a} \bar{u}\bar{v} - \bar{X} &= - (a \cos \varphi)^{-1} \overline{u'u'_{\lambda}} - a^{-1} \overline{v'u'_{\varphi}} - \overline{w'u'_z} + \frac{\tan \varphi}{a} \overline{u'v'}. \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

ここで、式 (B.54) の左辺第二項と左辺第五項は、

$$\bar{v}(a \cos \varphi)^{-1}(\bar{u} \cos \varphi)_\varphi = a^{-1}\bar{v}\bar{u}_\varphi - a^{-1}\bar{v}\bar{u} \tan \varphi \quad (\text{B.55})$$

より、

$$\begin{aligned} & \bar{u}_t + \bar{v}(a \cos \varphi)^{-1}(\bar{u} \cos \varphi)_\varphi + \bar{w}\bar{u}_z - f\bar{v} - \bar{X} \\ &= -(a \cos \varphi)^{-1}\overline{u'u'_\lambda} - a^{-1}\overline{v'u'_\varphi} - \overline{w'u'_z} + a^{-1}\overline{u'v'} \tan \varphi. \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

さらにここで、式 (B.50) に u' をかけて、東西平均をとると、式 (B.54) の右辺は、

$$\begin{aligned} & (a \cos \varphi)^{-1}\overline{u'u'_\lambda} + a^{-1}\overline{u'v'_\varphi} - a^{-1}\overline{u'v'} \tan \varphi + \rho_0^{-1}\rho_{0z}\overline{u'w'} + \overline{u'w'_z} = 0, \\ & (a \cos \varphi)^{-1} \left[(\overline{u'^2})_\lambda - \overline{u'u'_\lambda} \right] + a^{-1} \left[(\overline{v'u'})_\varphi - \overline{u'_\varphi v'} \right] - a^{-1}\overline{u'v'} \tan \varphi \\ & + \rho_0^{-1}\rho_{0z}\overline{u'w'} + \left[(\overline{w'u'})_z - \overline{u'_z w'} \right] = 0, \\ & -(a \cos \varphi)^{-1}\overline{u'u'_\lambda} - a^{-1}\overline{v'u'_\varphi} - \overline{w'u'_z} + a^{-1}\overline{u'v'} \tan \varphi \\ & = -a^{-1}(\overline{v'u'})_\varphi + 2a^{-1}\overline{v'u'} \tan \varphi - \rho_0^{-1}\rho_{0z}\overline{w'u'} - (\overline{w'u'})_z \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

式 (B.57) の右辺は、

$$\begin{aligned} & -a^{-1}(\overline{v'u'})_\varphi + 2a^{-1}\overline{v'u'} \tan \varphi - \rho_0^{-1}\rho_{0z}\overline{w'u'} - (\overline{w'u'})_z \\ & = -(a \cos \varphi)^{-1}(\overline{v'u'} \cos \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1}(\rho_{0z}\overline{w'u'})_z. \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

ここまですとまとめると、式 (B.54) は、

$$\begin{aligned} & \bar{u}_t + \bar{v}[(a \cos \varphi)^{-1}(\bar{u} \cos \varphi)_\varphi - f] + \bar{w}\bar{u}_z - \bar{X} \\ &= -(a \cos^2 \varphi)^{-1}(\overline{v'u'} \cos^2 \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1}(\rho_{0z}\overline{w'u'})_z. \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

式 (3.1b), (3.1e) でも同様の操作をすると、

$$\begin{aligned} & \bar{v}_t + a^{-1}\bar{v}\bar{v}_\varphi + \bar{w}\bar{v}_z + \bar{u}(f + \bar{u}a^{-1} \tan \varphi) + a^{-1}\bar{\Phi}_\varphi - \bar{Y} \\ &= -(a \cos \varphi)^{-1}(\overline{v'^2} \cos \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1}(\rho_{0z}\overline{w'v'})_z - \overline{u'^2}a^{-1} \tan \varphi, \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

$$\begin{aligned} & \bar{\theta}_t + a^{-1}\bar{v}\bar{\theta}_\varphi + \bar{w}\bar{\theta}_z - \bar{Q} \\ &= -(a \cos \varphi)^{-1}(\overline{v'\theta'} \cos \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1}(\rho_{0z}\overline{w'\theta'})_z. \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

最後に、式 (3.1c) を変形していく。各従属変数を平均場と擾乱場に分けて、その式に対して再度東西平均をとる。

$$\begin{aligned} & (\bar{\Phi} + \Phi')_z = H^{-1}R(\bar{\theta} + \theta')e^{-\kappa z/H}, \\ & \bar{\Phi}_z = H^{-1}R\bar{\theta}e^{-\kappa z/H}. \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

よってまとめると、式 (3.1) は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + \bar{v}[(a \cos \varphi)^{-1}(\bar{u} \cos \varphi)_\varphi - f] + \bar{w}\bar{u}_z - X \\ = -(a \cos^2 \varphi)^{-1}(\bar{v}'\bar{u}' \cos^2 \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1}(\rho_0 \bar{w}'\bar{u}')_z, \end{aligned} \quad (\text{B.63a})$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_t + a^{-1}\bar{v}\bar{v}_\varphi + \bar{w}\bar{v}_z + \bar{u}(f + \bar{u}a^{-1} \tan \varphi) + a^{-1}\bar{\Phi}_\varphi - \bar{Y} \\ = -(a \cos \varphi)^{-1}(\bar{v}'^2 \cos \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1}(\rho_0 \bar{w}'\bar{v}')_z - \bar{u}'^2 a^{-1} \tan \varphi, \end{aligned} \quad (\text{B.63b})$$

$$\bar{\Phi}_z - H^{-1}R\bar{\theta}e^{-\kappa z/H} = 0, \quad (\text{B.63c})$$

$$(a \cos \varphi)^{-1}(\bar{v} \cos \varphi)_\varphi + \rho_0^{-1}(\rho_0 \bar{w})_z = 0, \quad (\text{B.63d})$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_t + a^{-1}\bar{v}\bar{\theta}_\varphi + \bar{w}\bar{\theta}_z - \bar{Q} \\ = -(a \cos \varphi)^{-1}(\bar{v}'\bar{\theta}' \cos \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1}(\rho_0 \bar{w}'\bar{\theta}')_z. \end{aligned} \quad (\text{B.63e})$$

これで、Andrews et al. (1987) における式 (3.3.2a)-(3.3.2e) であり、本資料の式 (3.4) に対応するものである。

B.3 式 (3.6) の導出

この節では、Andrews et al. (1987) にもとづき、式 (3.6) の導出を行う。

出発する方程式は以下の式である。

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + \bar{v}[(a \cos \varphi)^{-1}(\bar{u} \cos \varphi)_\varphi - f] + \bar{w}\bar{u}_z - X \\ = -(a \cos^2 \varphi)^{-1}(\bar{v}'\bar{u}' \cos^2 \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1}(\rho_0 \bar{w}'\bar{u}')_z, \end{aligned} \quad (\text{B.64a})$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_t + a^{-1}\bar{v}\bar{v}_\varphi + \bar{w}\bar{v}_z + \bar{u}(f + \bar{u}a^{-1} \tan \varphi) + a^{-1}\bar{\Phi}_\varphi - \bar{Y} \\ = -(a \cos \varphi)^{-1}(\bar{v}'^2 \cos \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1}(\rho_0 \bar{w}'\bar{v}')_z - \bar{u}'^2 a^{-1} \tan \varphi, \end{aligned} \quad (\text{B.64b})$$

$$\bar{\Phi}_z - H^{-1}R\bar{\theta}e^{-\kappa z/H} = 0, \quad (\text{B.64c})$$

$$(a \cos \varphi)^{-1}(\bar{v} \cos \varphi)_\varphi + \rho_0^{-1}(\rho_0 \bar{w})_z = 0, \quad (\text{B.64d})$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_t + a^{-1}\bar{v}\bar{\theta}_\varphi + \bar{w}\bar{\theta}_z - \bar{Q} \\ = -(a \cos \varphi)^{-1}(\bar{v}'\bar{\theta}' \cos \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1}(\rho_0 \bar{w}'\bar{\theta}')_z. \end{aligned} \quad (\text{B.64e})$$

今回は、残差循環 $\mathbf{v}^* \equiv (0, \bar{v}^*, \bar{w}^*)$ を導入する。定義は以下である。

$$\bar{v}^* \equiv \bar{v} - \rho_0^{-1}(\rho_0 \bar{v}'\bar{\theta}'/\bar{\theta}_z)_z, \quad (\text{B.65a})$$

$$\bar{w}^* \equiv \bar{w} + (a \cos \varphi)^{-1}(\cos \varphi \bar{v}'\bar{\theta}'/\bar{\theta}_z)_\varphi. \quad (\text{B.65b})$$

まず, 式 (3.4c) と式 (3.6c) は同じ式である.

次に, (3.4d) を変形する.

$$\begin{aligned}
 & (a \cos \varphi)^{-1} \left[\{ \bar{v}^* + \rho_0^{-1} (\rho_0 \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z)_z \} \cos \varphi \right]_{\varphi} \\
 & + \rho_0^{-1} \left[\rho_0 \{ \bar{w}^* - (a \cos \varphi)^{-1} (\cos \varphi \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z)_{\varphi} \} \right]_z = 0, \\
 & (a \cos \varphi)^{-1} (\bar{v}^* \cos \varphi)_{\varphi} + \rho_0^{-1} (\rho_0 \bar{w}^*)_z \\
 & = - \frac{\{ (\rho_0 \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z)_z \cos \varphi \}_{\varphi}}{\rho_0 a \cos \varphi} + \frac{\{ (\rho_0 \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z)_z \cos \varphi \}_{\varphi}}{\rho_0 a \cos \varphi} = 0
 \end{aligned} \tag{B.66}$$

次に, (3.4b) を変形する.

$$\begin{aligned}
 & \left[\bar{v}^* + \rho_0^{-1} \left(\rho_0 \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z \right)_z \right]_t + a^{-1} \left[\bar{v}^* + \rho_0^{-1} \left(\rho_0 \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z \right)_z \right] \bar{v}_{\varphi} \\
 & + \left[\bar{w}^* - (a \cos \varphi)^{-1} (\cos \varphi \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z)_{\varphi} \right] \bar{v}_z + \bar{u} (f + \bar{u} a^{-1} \tan \varphi) + a^{-1} \bar{\Phi}_{\varphi} - \bar{Y} \\
 & = - (a \cos \varphi)^{-1} (\overline{v'^2} \cos \varphi)_{\varphi} - \rho_0^{-1} (\rho_0 \overline{w' v'})_z - \bar{u'^2} a^{-1} \tan \varphi, \\
 & \bar{u} (f + \bar{u} a^{-1} \tan \varphi) + a^{-1} \bar{\Phi}_{\varphi} = G.
 \end{aligned} \tag{B.67}$$

ただし, G は $\bar{u}$ と $\bar{\Phi}$ 間の地衡風平衡からの逸脱すべてを表す.

次に, (3.4e) を変形する.

$$\begin{aligned}
 & \bar{\theta}_t + a^{-1} \left[\bar{v}^* + \rho_0^{-1} \left(\rho_0 \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z \right)_z \right] \bar{\theta}_{\varphi} + \left[\bar{w}^* - (a \cos \varphi)^{-1} (\cos \varphi \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z)_{\varphi} \right] \bar{\theta}_z - \bar{Q} \\
 & = - (a \cos \varphi)^{-1} (\overline{v' \theta'} \cos \varphi)_{\varphi} - \rho_0^{-1} (\rho_0 \overline{w' \theta'})_z, \\
 & \bar{\theta}_t + a^{-1} \bar{v}^* \bar{\theta}_{\varphi} + \bar{w}^* \bar{\theta}_z - \bar{Q} \\
 & = - (\rho_0 a)^{-1} (\rho_0 \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z)_z \bar{\theta}_{\varphi} + (a \cos \varphi)^{-1} (\overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z \cos \varphi)_{\varphi} \bar{\theta}_z \\
 & - (a \cos \varphi)^{-1} (\overline{v' \theta'} \cos \varphi)_{\varphi} - \rho_0^{-1} (\rho_0 \overline{w' \theta'}) .
 \end{aligned} \tag{B.68}$$

ここで, 式 (B.68) の右辺第二項と第三項は,

$$\begin{aligned}
 & (a \cos \varphi)^{-1} (\overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z \cos \varphi)_{\varphi} \bar{\theta}_z - (a \cos \varphi)^{-1} (\overline{v' \theta'} \cos \varphi)_{\varphi} \\
 & = a^{-1} (\overline{v' \theta'})_{\varphi} + a^{-1} \overline{v' \theta'} (\bar{\theta}_z^{-1})_{\varphi} \bar{\theta}_z - a^{-1} \overline{v' \theta'} \tan \varphi - a^{-1} (\overline{v' \theta'})_{\varphi} + a^{-1} \overline{v' \theta'} \tan \varphi \\
 & = -a^{-1} \overline{v' \theta'} \bar{\theta}_z^{-2} \bar{\theta}_{z\varphi} \bar{\theta}_z \\
 & = -a^{-1} \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z \bar{\theta}_{z\varphi} .
 \end{aligned} \tag{B.69}$$

さらに,

$$- (\rho_0 a)^{-1} (\rho_0 \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z)_z \bar{\theta}_{\varphi} - a^{-1} \overline{v' \theta'} / \bar{\theta}_z \bar{\theta}_{z\varphi} - \rho_0^{-1} (\rho_0 \overline{w' \theta'})$$

$$= -\rho_0^{-1} [\rho_0 (\overline{v'\theta'} \bar{\theta}_\varphi / a \bar{\theta}_z + \overline{w'\theta'})]_z \quad (\text{B.70})$$

より, 式 (B.68) は,

$$\bar{\theta}_t + a^{-1} \bar{v}^* \bar{\theta}_\varphi + \bar{w}^* \bar{\theta}_z - \bar{Q} = -\rho_0^{-1} [\rho_0 (\overline{v'\theta'} \bar{\theta}_\varphi / a \bar{\theta}_z + \overline{w'\theta'})]_z. \quad (\text{B.71})$$

最後に, (3.4a) を変形する.

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + \left[\bar{v}^* + \rho_0^{-1} \left(\rho_0 \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z \right)_z \right] & [(a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi - f] + [\bar{w}^* - (a \cos \varphi)^{-1} (\cos \varphi \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z)_\varphi] \bar{u}_z - X \\ & = - (a \cos^2 \varphi)^{-1} (\overline{v'u'} \cos^2 \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1} (\rho_0 \overline{w'u'})_z \\ \bar{u}_t + \bar{v} [(a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi - f] + \bar{w} \bar{u}_z - X \\ & = - (\rho_0 a \cos \varphi)^{-1} (\rho_0 \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z) (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi + \rho_0^{-1} f (\rho_0 \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z)_z \\ & \quad + (a \cos \varphi)^{-1} \bar{u}_z (\overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z \cos \varphi)_\varphi - (a \cos^2 \varphi)^{-1} (\overline{v'u'} \cos \varphi)_\varphi - \rho_0^{-1} (\rho_0 \overline{w'u'})_z. \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

ここで, 式 (B.72) の右辺第一項と第三項は,

$$\begin{aligned} & - (\rho_0 a \cos \varphi)^{-1} (\rho_0 \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z) (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi + (a \cos \varphi)^{-1} \bar{u}_z (\overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z \cos \varphi)_\varphi \\ & = - (\rho_0 a \cos \varphi)^{-1} \rho_{0z} \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi - (a \cos \varphi)^{-1} (\overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z)_z (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi \\ & \quad - a^{-1} \bar{u}_z \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z \tan \varphi + a^{-1} \bar{u}_z (\overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z)_\varphi. \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

ここで, エリアッセン-パームフラックス $\mathbf{F} = (0, F^{(\varphi)}, F^{(z)})$ を定義する.

$$F^{(\varphi)} \equiv \rho_0 a \cos \varphi (\bar{u}_z \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z - \overline{v'u'}), \quad (\text{B.74a})$$

$$F^{(z)} \equiv \rho_0 a \cos \varphi [f - (a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi] \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z - \overline{w'u'}. \quad (\text{B.74b})$$

このエリアッセン-パームフラックスの発散を $\rho_0 a \cos \varphi$ で割ったものを考える.

$$\begin{aligned} (\rho_0 a \cos \varphi)^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F} & = (a \cos^2 \varphi)^{-1} [\bar{u}_z \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z \cos^2 \varphi - \overline{v'u'} \cos^2 \varphi]_\varphi \\ & \quad + \rho_0^{-1} \left[\rho_0 \left\{ f \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z - (a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z - \overline{w'u'} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

式 (B.75) の右辺第一項は,

$$\begin{aligned} & (a \cos^2 \varphi)^{-1} [\bar{u}_z \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z \cos^2 \varphi - \overline{v'u'} \cos^2 \varphi]_\varphi \\ & = (a \cos^2 \varphi)^{-1} [\bar{u}_z \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z \cos^2 \varphi]_\varphi - (a \cos^2 \varphi)^{-1} [\overline{v'u'} \cos^2 \varphi]_\varphi \\ & = a^{-1} \bar{u}_{z\varphi} \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z + a^{-1} \bar{u}_z (\overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z)_\varphi - 2a^{-1} \bar{u}_z \overline{v'\theta'} / \bar{\theta}_z \tan \varphi - (a \cos^2 \varphi)^{-1} [\overline{v'u'} \cos^2 \varphi]_\varphi. \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

式 (B.75) の右辺第二項は,

$$\begin{aligned}
& \rho_0^{-1} \left[\rho_0 \left\{ f \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z - (a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z - \overline{w'u'} \right\} \right] \\
&= \rho_0^{-1} f [\rho_0 \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z]_z - (\rho_0 a \cos \varphi)^{-1} \left[\rho_0 (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z \right]_z - \rho_0^{-1} [\rho_0 \overline{w'u'}]_z \\
&= -(\rho_0 a \cos \varphi)^{-1} \rho_{0z} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z - (a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u}_z \cos \varphi)_\varphi \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z \\
&\quad - (a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi (\overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z)_z + \rho_0^{-1} f [\rho_0 \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z]_z - \rho_0^{-1} [\rho_0 \overline{w'u'}]_z \\
&= -a^{-1} \bar{u}_z \varphi \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z + a^{-1} \bar{u}_z \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z \tan \varphi - (\rho_0 a \cos \varphi)^{-1} \rho_{0z} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z \\
&\quad - (a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi (\overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z)_z + \rho_0^{-1} f [\rho_0 \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z]_z - \rho_0^{-1} [\rho_0 \overline{w'u'}]_z . \quad (\text{B.77})
\end{aligned}$$

よって, 式 (B.76), (B.77) を足し合わせると,

$$\begin{aligned}
& (\rho_0 a \cos \varphi)^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F} \\
&= a^{-1} \bar{u}_z (\overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z)_\varphi - a^{-1} \bar{u}_z \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z \tan \varphi - (a \cos^2 \varphi)^{-1} [\overline{v'u'} \cos^2 \varphi]_\varphi \\
&\quad - (\rho_0 a \cos \varphi)^{-1} \rho_{0z} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z - (a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi (\overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z)_z \\
&\quad + \rho_0^{-1} f [\rho_0 \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z]_z - \rho_0^{-1} [\rho_0 \overline{w'u'}]_z . \quad (\text{B.78})
\end{aligned}$$

つまり, 式 (B.72), (B.73), (B.78) より,

$$\begin{aligned}
& \bar{u}_t + \bar{v}^* [(a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi - f] + \bar{w}^* \bar{u}_z - \bar{X} \\
&= (\rho_0 a \cos \varphi)^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F} . \quad (\text{B.79})
\end{aligned}$$

よって, ここまでの内容をまとめると,

$$\begin{aligned}
& \bar{u}_t + \bar{v}^* [(a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi - f] + \bar{w}^* \bar{u}_z - \bar{X} \\
&= (\rho_0 a \cos \varphi)^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F} , \quad (\text{B.80a})
\end{aligned}$$

$$\bar{u}(f + \bar{u} a^{-1} \tan \varphi) + a^{-1} \bar{\Phi}_\varphi = G , \quad (\text{B.80b})$$

$$\bar{\Phi}_z - H^{-1} R \bar{\theta} e^{-\kappa z/H} = 0 , \quad (\text{B.80c})$$

$$(a \cos \varphi)^{-1} (\bar{v}^* \cos \varphi)_\varphi + \rho_0^{-1} (\rho_0 \bar{w}^*)_z = 0 , \quad (\text{B.80d})$$

$$\bar{\theta}_t + a^{-1} \bar{v}^* \bar{\theta}_\varphi + \bar{w}^* \bar{\theta}_z - \bar{Q} = -\rho_0^{-1} [\rho_0 (\overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_\varphi / a \bar{\theta}_z + \overline{w'\theta'})]_z . \quad (\text{B.80e})$$

ただし, $\mathbf{F} = (0, F^{(\varphi)}, F^{(z)})$ はエリアッセン-パームフラックスであり,

$$F^{(\varphi)} \equiv \rho_0 a \cos \varphi (\bar{u}_z \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z - \overline{v'u'}) , \quad (\text{B.81a})$$

$$F^{(z)} \equiv \rho_0 a \cos \varphi [\{f - (a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u} \cos \varphi)_\varphi\} \overline{v'\theta'}/\bar{\theta}_z - \overline{w'u'}] \quad (\text{B.81b})$$

である。これで, Andrews et al. (1987) における TEM 方程式 (3.5.2a)-(3.5.2e) の導出ができた。これは, 本資料の式 (3.6) に対応するものである。

B.4 Vallis (2006) での TEM 方程式の導出

この節では Vallis (2006) を参考に TEM 方程式の導出を行う。

B.4.1 基礎方程式に対するブシネスク近似

ここでは, ある天体上において, 東西方向, 南北方向, 鉛直方向を (x, y, z) とする直交座標系を用いる。それぞれ, 東方向, 北方向, 鉛直上方が正である。このとき, 天体の自転角速度ベクトル Ω は, 緯度 φ を用いて $\Omega = (0, \Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi)$ と表せられる。

まず, 回転系での運動方程式と連続の式と熱の式⁵⁶⁾は,

$$\rho \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\Omega \times \mathbf{v} \right) = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \rho \mathbf{F}, \quad (\text{B.82})$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{B.83})$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{1}{T} \dot{Q}. \quad (\text{B.84})$$

ここで, ρ は密度, $\mathbf{v}$ は流体の速度, p は圧力, Φ は重力ポテンシャル, η は比エントロピー (単位質量当たりのエントロピー), T は温度, $\dot{Q}$ は単位質量あたりの加熱率⁵⁷⁾, $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ は摩擦項である。

これから式 (B.82)-(B.84) にブシネスク近似を施していく。ブシネスク近似とは, 浮力項以外での密度変化を無視して考える近似である。

ブシネスク近似を行うために, まずは密度 ρ を以下のように表現する。

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'(x, y, z, t). \quad (\text{B.85})$$

ただし, $\bar{\rho}$ は定数であり, ρ' について,

$$|\rho'| \ll \bar{\rho} \quad (\text{B.86})$$

⁵⁶⁾ 熱の式の導出は, B.5 を参照のこと。

⁵⁷⁾ $\dot{Q}$ は, 単位自体は $[J/s]$ であるが, dQ/dt を表しているわけではない。

が成り立つ.

またここで, 静水圧平衡,

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho \quad (\text{B.87})$$

を仮定する.

すると, 圧力 p は静水圧平衡の式を介して,

$$p = \bar{p}(z) + p'(x, y, z, t) \quad (\text{B.88})$$

と表せられる. ただし, p' について,

$$|p'| \ll \bar{p} \quad (\text{B.89})$$

であり, $\bar{\rho}$ と $\bar{p}$, ρ' と p' にはそれぞれ,

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = -\bar{\rho}g, \quad (\text{B.90a})$$

$$\frac{dp'}{dz} = -\rho'g \quad (\text{B.90b})$$

となる.

そしてまずは, 連続の式に対してブシネスク近似を施す. 式 (B.83) に式 (B.85) に代入して,

$$\frac{D\rho'}{Dt} + (\bar{\rho} + \rho')\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (\text{B.91})$$

ここで, 時間スケール $[T]$ と移流時間のスケール $[L/U]$ が等しいと考えると⁵⁸⁾,

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) + \left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{B.92})$$

より, 連続の式は,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{B.93})$$

となる.

次に, 運動方程式に対してブシネスク近似を施す. 重力加速度 g を用いて $\Phi = gz$ とすると, 重力項 $\nabla\Phi$ は,

$$\nabla\Phi = g\mathbf{k} \quad (\text{B.94})$$

と表せる, ただし, $\mathbf{k}$ は z 方向の単位ベクトルである. このとき, 式 (B.82) は,

$$(\bar{\rho} + \rho') \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \right) = -\nabla(\bar{p} + p') - g(\bar{\rho} + \rho')\mathbf{k} + (\bar{\rho} + \rho')\mathbf{F},$$

⁵⁸⁾ ここでは, $(\rho'/\bar{\rho})_t$ と $(\rho'/\bar{\rho})\nabla \cdot \mathbf{v}$ が釣り合うと考えていると思われる.

$$(\bar{\rho} + \rho') \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \right) = -\nabla p' - \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g\bar{\rho} \right) \mathbf{k} - g\rho' \mathbf{k} + (\bar{\rho} + \rho') \mathbf{F} \quad (\text{B.95})$$

となる．ここで，式 (B.90a), (B.90b) より，式 (B.95) は，

$$(\bar{\rho} + \rho') \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \right) = -\nabla p' - g\rho' \mathbf{k} + (\bar{\rho} + \rho') \mathbf{F}. \quad (\text{B.96})$$

ここで，ブシネスク近似を適用すると $\rho'/\bar{\rho} \ll 1$ となるため，

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' - g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \mathbf{k} + \mathbf{F}. \quad (\text{B.97})$$

よって， $\phi = p'/\bar{\rho}$ ，浮力と呼ばれる量 $b = g\rho'/\bar{\rho}$ とすると，

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla \phi + b\mathbf{k} + \mathbf{F}. \quad (\text{B.98})$$

最後に，熱の式に対してブシネスク近似を施す．熱の式については， η を圧力と密度の変数と考えると，

$$Td\eta = T \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \right)_p d\rho + T \left(\frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_\rho dp. \quad (\text{B.99})$$

ここで，ヤコビアンを用いると，

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_\rho &= \frac{\partial(\eta, \rho)}{\partial(p, \rho)} \\ &= \frac{\partial(\eta, \rho)}{\partial(\eta, p)} \frac{\partial(\eta, p)}{\partial(p, \rho)} \\ &= -\frac{\partial(\rho, \eta)}{\partial(p, \eta)} \frac{\partial(\eta, p)}{\partial(\rho, p)} \\ &= -\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_\eta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \right)_p. \end{aligned} \quad (\text{B.100})$$

よって，式 (B.99) は，

$$Td\eta = T \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \right)_p d\rho - T \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \right)_p \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_\eta dp. \quad (\text{B.101})$$

すると，式 (B.84) は，

$$\begin{aligned} T \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \right)_p \frac{D\rho}{Dt} - T \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \right)_p \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_\eta \frac{Dp}{Dt} &= \dot{Q}, \\ \frac{D\rho}{Dt} - \frac{1}{c_s^2} \frac{Dp}{Dt} &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)_p \frac{\dot{Q}}{T} \end{aligned} \quad (\text{B.102})$$

となる. ただし, $c_s^2 = \partial p / \partial \rho$ は音速である. ここで, 定圧比熱 c_p , 熱膨張率 β_T の定義より,

$$c_p \equiv \left(\frac{\bar{\partial} Q}{\partial T} \right)_p = T \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)_p, \quad (\text{B.103})$$

$$\beta_T \equiv -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \quad (\text{B.104})$$

であるため⁵⁹⁾,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \right)_p &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_p \\ &\simeq -\frac{c_p}{T} \frac{1}{\bar{\rho} \beta_T} \end{aligned} \quad (\text{B.106})$$

と言える. よって, 式 (B.88), (B.85), (B.106) より, 式 (B.102) は,

$$\frac{D(\bar{\rho} + \rho')}{Dt} - \frac{1}{c_s^2} \frac{D(\bar{p} + p')}{Dt} = -\frac{\bar{\rho} \beta_T}{c_p} \dot{Q}. \quad (\text{B.107})$$

$p'/c_s^2 \ll \rho'$ とすると, $\bar{\rho} = \text{const.}$, 式 (B.90a) より, 近似を施すと,

$$\frac{D\rho'}{Dt} + \frac{\bar{\rho} g}{c_s^2} \frac{Dz}{Dt} = -\frac{\bar{\rho} \beta_T}{c_p} \dot{Q}. \quad (\text{B.108})$$

式 (B.108) の左辺第 2 項を無視する⁶⁰⁾と, 浮力 $b = g\rho'/\bar{\rho}$ を用いて,

$$\frac{Db}{Dt} = -\frac{g\beta_T}{c_p} \dot{Q} \equiv S_q. \quad (\text{B.109})$$

結果的に, ブシネスク方程式系での運動方程式と連続の式と熱の式は,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\phi + b\mathbf{k} + \mathbf{F}, \quad (\text{B.110a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{B.110b})$$

$$\frac{Db}{Dt} = S_q, \quad (\text{B.110c})$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (\text{B.110d})$$

⁵⁹⁾

$$c_p \equiv \left(\frac{\bar{\partial} Q}{\partial T} \right)_p \quad (\text{B.105})$$

の $\bar{\partial}$ は, 経路によって積分結果が変わる微分である, 不完全微分を表している.

⁶⁰⁾ Vallis(2006) で "The severest approximation to this is to neglect the second term in brackets on the left-hand side" とあり, 第 2 版でも同様の記述がみられたが, 理由は書いていなかった.

となる。

ここからは, 上記式を東西平均場と擾乱場に分けていく。

ここで, 式 (B.110a) の x 成分を取り出して⁶¹⁾,

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - fv &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} + F_x, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} + F_x \end{aligned} \quad (\text{B.112})$$

となる。ここで, 平均場の式を導くために, 最初に少し式の形を変えておく。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial y} \\ - u\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial w}{\partial z} - u\frac{\partial w}{\partial z} - fv &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} + F_x, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + 2u\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}v + u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}w + u\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ - u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - fv &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} + F_x. \end{aligned} \quad (\text{B.113})$$

ここで, 式 (B.110b) を使うと左辺第 5 項は 0 になるので,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 2u\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}v + u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}w + u\frac{\partial w}{\partial z}\right) - fv &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} + F_x, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) - fv &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} + F_x. \end{aligned} \quad (\text{B.114})$$

ここまでの方程式をまとめると,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) - fv = -\frac{\partial\phi}{\partial x} + F_x, \quad (\text{B.115a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(vw) + fu = -\frac{\partial\phi}{\partial y} + F_y, \quad (\text{B.115b})$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(ub) + \frac{\partial}{\partial y}(vb) + \frac{\partial}{\partial z}(wb) = S, \quad (\text{B.115c})$$

61)

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} &= 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \varphi \\ \Omega \sin \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -fv \\ fu \\ 2u\Omega \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.111})$$

としている。ただし, $f = 2\Omega \sin \varphi$ であり, u, v は w より大きいとしている。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{B.115d})$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (\text{B.115e})$$

東西平均場が満たす方程式系は後々には使わないが, B.6 で導出することにした.

以下では, この方程式系に準地衡流近似を施していく.

B.4.2 ブシネスク方程式系に対する準地衡流近似

そのために, まず, 式 (B.115a) を以下の無次元数で変形していく.

$$(\hat{x}, \hat{y}) = L^{-1}(x, y), \quad (\text{B.116a})$$

$$\hat{z} = H^{-1}z, \quad (\text{B.116b})$$

$$(\hat{u}, \hat{v}) = U^{-1}(u, v), \quad (\text{B.116c})$$

$$\hat{w} = \frac{L}{UH}w, \quad (\text{B.116d})$$

$$\hat{t} = \frac{U}{L}t, \quad (\text{B.116e})$$

$$\hat{f} = \frac{f}{f_0}, \quad (\text{B.116f})$$

$$\hat{\beta} = \frac{L^2}{U}\beta, \quad (\text{B.116g})$$

$$\hat{\phi} = \frac{1}{f_0UL}\phi, \quad (\text{B.116h})$$

$$\hat{b} = B^{-1}b. \quad (\text{B.116i})$$

ただし, L は水平スケール, H は鉛直スケール, U は水平速度スケール, B は浮力スケール, f_0 はある y 座標でのコリオリパラメータである. また, $\beta = 2\Omega \cos \varphi$ を用いて β 面近似を行う. そして, $Ro = U/f_0L$ はロスビー数である. さらに, $\hat{}$ があるものは無次元数, $\hat{}$ がないものは有次元数を表す.

式 (B.116) を式 (B.115a) に代入して,

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{L} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \frac{U^2}{L} \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}^2) + \frac{U^2}{L} \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\hat{u}\hat{v}) + \frac{U^2}{L} \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{u}\hat{w}) - f_0U\hat{f}\hat{v} &= -f_0U \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} + F_x, \\ \frac{U}{f_0L} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \frac{U}{f_0L} \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}^2) + \frac{U}{f_0L} \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\hat{u}\hat{v}) + \frac{U}{f_0L} \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{u}\hat{w}) - \hat{f}\hat{v} &= -\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{f_0U}F_x, \end{aligned}$$

$$Ro \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + Ro \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}^2) + Ro \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\hat{u}\hat{v}) + Ro \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{u}\hat{w}) - \hat{f}\hat{v} = -\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} + Ro \frac{L}{U^2} F_x. \quad (\text{B.117})$$

同様に式 (B.115b) から式 (B.115d) にも代入する. それらをまとめて,

$$Ro \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + Ro \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}^2) + Ro \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\hat{u}\hat{v}) + Ro \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{u}\hat{w}) - \hat{f}\hat{v} = -\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} + Ro \frac{L}{U^2} F_x, \quad (\text{B.118a})$$

$$Ro \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + Ro \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}\hat{v}) + Ro \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\hat{v}^2) + Ro \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{v}\hat{w}) + \hat{f}\hat{u} = -\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{y}} + Ro \frac{L}{U^2} F_y, \quad (\text{B.118b})$$

$$\frac{\partial \hat{b}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}\hat{b}) + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\hat{v}\hat{b}) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{w}\hat{b}) = \frac{L}{BU} S_q, \quad (\text{B.118c})$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0. \quad (\text{B.118d})$$

次に, 従属変数を Ro を用いて漸次展開する.

$$\hat{u} = \hat{u}_0 + Ro\hat{u}_1 + \cdots, \quad (\text{B.119a})$$

$$\hat{v} = \hat{v}_0 + Ro\hat{v}_1 + \cdots, \quad (\text{B.119b})$$

$$\hat{w} = \hat{w}_0 + Ro\hat{w}_1 + \cdots, \quad (\text{B.119c})$$

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}_0 + Ro\hat{\phi}_1 + \cdots, \quad (\text{B.119d})$$

$$\hat{f} = \hat{f}_0 + Ro\hat{\beta}\hat{y}, \quad (\text{B.119e})$$

$$\hat{b} = \hat{b}_0 + Ro\hat{b}_1 + \cdots. \quad (\text{B.119f})$$

式 (B.119) の Ro の 1 次の項までを式 (B.118a) に代入して,

$$\begin{aligned} & Ro \frac{\partial}{\partial \hat{t}}(\hat{u}_0 + Ro\hat{u}_1) + Ro \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}_0 + Ro\hat{u}_1)^2 + Ro \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\hat{u}_0 + Ro\hat{u}_1)(\hat{v}_0 + Ro\hat{v}_1) \\ & + Ro \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{u}_0 + Ro\hat{u}_1)(\hat{w}_0 + Ro\hat{w}_1) - (\hat{f}_0 + Ro\hat{\beta}\hat{y})(\hat{v}_0 + Ro\hat{v}_1) \\ & = -\frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{\phi}_0 + Ro\hat{\phi}_1) + Ro \frac{L}{U^2} F_x \end{aligned} \quad (\text{B.120})$$

となる. 同様に, 式 (B.118b) から式 (B.118d) にも代入し, それらの式の Ro の 0 次のつり合いを考えると,

$$\hat{f}_0\hat{v}_0 = \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \hat{x}}, \quad (\text{B.121a})$$

$$\hat{f}_0\hat{u}_0 = -\frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \hat{y}}, \quad (\text{B.121b})$$

$$\frac{\partial \hat{b}_0}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}_0\hat{b}_0) + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\hat{v}_0\hat{b}_0) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{w}_0\hat{b}_0) = \frac{L}{BU} S_q, \quad (\text{B.121c})$$

$$\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{z}} = 0 \quad (\text{B.121d})$$

となり, 1 次のつり合いを考えると,

$$\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}_0^2) + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\hat{u}_0 \hat{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{u}_0 \hat{w}_0) - \hat{f}_0 \hat{v}_1 - \hat{v}_0 \hat{\beta} \hat{y} = -\frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}} + \frac{L}{U^2} F_x, \quad (\text{B.122a})$$

$$\frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}_0 \hat{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\hat{v}_0^2) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{v}_0 \hat{w}_0) + \hat{f}_0 \hat{u}_1 + \hat{u}_0 \hat{\beta} \hat{y} = -\frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{y}} + \frac{L}{U^2} F_y, \quad (\text{B.122b})$$

$$\frac{\partial \hat{b}_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\hat{u}_0 \hat{b}_1 + \hat{u}_1 \hat{b}_0) + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\hat{v}_0 \hat{b}_1 + \hat{v}_1 \hat{b}_0) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\hat{w}_0 \hat{b}_1 + \hat{w}_1 \hat{b}_0) = 0, \quad (\text{B.122c})$$

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \hat{z}} = 0 \quad (\text{B.122d})$$

となる. 次に, これらの式を対して東西平均場と擾乱場に分ける. すると, 式 (B.122a) は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{t}}(\bar{\hat{u}}_0 + \hat{u}'_0) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\bar{\hat{u}}_0 + \hat{u}'_0)^2 + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\bar{\hat{u}}_0 + \hat{u}'_0)(\bar{\hat{v}}_0 + \hat{v}'_0) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\bar{\hat{u}}_0 + \hat{u}'_0)(\bar{\hat{w}}_0 + \hat{w}'_0) \\ - \hat{f}_0(\bar{\hat{v}}_1 + \hat{v}'_1) - (\bar{\hat{v}}_0 + \hat{v}'_0)\hat{\beta}\hat{y} = -\frac{\partial}{\partial \hat{x}}(\bar{\hat{\phi}}_1 + \hat{\phi}'_1) + \frac{L}{U^2}(\bar{F}_x + F'_x) \end{aligned} \quad (\text{B.123})$$

そして, 東西平均をとると, x 微分の項は 0 となり, さらに擾乱成分の東西平均は 0 になるため, 式 (B.121a), 式 (B.122a) は,

$$\hat{f}_0 \bar{\hat{v}}_0 = 0, \quad (\text{B.124})$$

$$\frac{\partial \bar{\hat{u}}_0}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\bar{\hat{u}}_0 \bar{\hat{v}}_0 + \overline{\hat{u}'_0 \hat{v}'_0}) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\bar{\hat{u}}_0 \bar{\hat{w}}_0 + \overline{\hat{u}'_0 \hat{w}'_0}) - \hat{f}_0 \bar{\hat{v}}_1 - \bar{\hat{v}}_0 \hat{\beta} \hat{y} = \frac{L}{U^2} \bar{F}_x. \quad (\text{B.125})$$

同様にすべての式に同じ操作を施すと, 0 次の式は,

$$\hat{f}_0 \bar{\hat{v}}_0 = 0, \quad (\text{B.126a})$$

$$\hat{f}_0 \bar{\hat{u}}_0 = -\frac{\partial \bar{\hat{\phi}}_0}{\partial \hat{y}}, \quad (\text{B.126b})$$

$$\frac{\partial \bar{\hat{b}}_0}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\bar{\hat{v}}_0 \bar{\hat{b}}_0 + \overline{\hat{v}'_0 \hat{b}'_0}) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\bar{\hat{w}}_0 \bar{\hat{b}}_0 + \overline{\hat{w}'_0 \hat{b}'_0}) = \frac{L}{BU} \bar{S}_q, \quad (\text{B.126c})$$

$$\frac{\partial \bar{\hat{v}}_0}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \bar{\hat{w}}_0}{\partial \hat{z}} = 0. \quad (\text{B.126d})$$

1 次の式は,

$$\frac{\partial \bar{\hat{u}}_0}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\bar{\hat{u}}_0 \bar{\hat{v}}_0 + \overline{\hat{u}'_0 \hat{v}'_0}) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\bar{\hat{u}}_0 \bar{\hat{w}}_0 + \overline{\hat{u}'_0 \hat{w}'_0}) - \hat{f}_0 \bar{\hat{v}}_1 - \bar{\hat{v}}_0 \hat{\beta} \hat{y} = \frac{L}{U^2} \bar{F}_x, \quad (\text{B.127a})$$

$$\frac{\partial \bar{\hat{v}}_0}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\bar{\hat{v}}_0^2 + \overline{\hat{v}_0'^2}) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\bar{\hat{v}}_0 \bar{\hat{w}}_0 + \overline{\hat{v}_0' \hat{w}_0'}) + \hat{f}_0 \bar{\hat{u}}_1 + \bar{\hat{u}}_0 \hat{\beta} \hat{y} = -\frac{\partial \bar{\hat{\phi}}_1}{\partial \hat{y}} + \frac{L}{U^2} \bar{F}_y, \quad (\text{B.127b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\hat{b}}_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\bar{\hat{v}}_0 \bar{\hat{b}}_1 + \bar{\hat{v}}_1 \bar{\hat{b}}_0 + \overline{\hat{v}_0' \hat{b}_1'} + \overline{\hat{v}_1' \hat{b}_0'}) \\ + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\bar{\hat{w}}_0 \bar{\hat{b}}_1 + \bar{\hat{w}}_1 \bar{\hat{b}}_0 + \overline{\hat{w}_0' \hat{b}_1'} + \overline{\hat{w}_1' \hat{b}_0'}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.127c})$$

$$\frac{\partial \bar{\hat{v}}_1}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \bar{\hat{w}}_1}{\partial \hat{z}} = 0. \quad (\text{B.127d})$$

式 (B.126a) より, $\bar{\hat{v}}_0 = 0$ なので, 式 (B.126) は,

$$\bar{\hat{v}}_0 = 0, \quad (\text{B.128a})$$

$$\hat{f}_0 \bar{\hat{u}}_0 = -\frac{\partial \bar{\hat{\phi}}_0}{\partial \hat{y}}, \quad (\text{B.128b})$$

$$\frac{\partial \bar{\hat{b}}_0}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\overline{\hat{v}_0' \hat{b}_0'}) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\bar{\hat{w}}_0 \bar{\hat{b}}_0 + \overline{\hat{w}_0' \hat{b}_0'}) = \frac{L}{BU} \bar{S}_q, \quad (\text{B.128c})$$

$$\frac{\partial \bar{\hat{w}}_0}{\partial \hat{z}} = 0. \quad (\text{B.128d})$$

式 (B.127) は,

$$\frac{\partial \bar{\hat{u}}_0}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\overline{\hat{u}_0' \hat{v}_0'}) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\bar{\hat{u}}_0 \bar{\hat{w}}_0 + \overline{\hat{u}_0' \hat{w}_0'}) - \hat{f}_0 \bar{\hat{v}}_1 = \frac{L}{U^2} \bar{F}_x, \quad (\text{B.129a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\overline{\hat{v}_0'^2}) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\overline{\hat{v}_0' \hat{w}_0'}) + \hat{f}_0 \bar{\hat{u}}_1 + \bar{\hat{u}}_0 \hat{\beta} \hat{y} = -\frac{\partial \bar{\hat{\phi}}_1}{\partial \hat{y}} + \frac{L}{U^2} \bar{F}_y, \quad (\text{B.129b})$$

$$\frac{\partial \bar{\hat{b}}_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\bar{\hat{v}}_1 \bar{\hat{b}}_0 + \overline{\hat{v}_0' \hat{b}_1'} + \overline{\hat{v}_1' \hat{b}_0'}) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\bar{\hat{w}}_0 \bar{\hat{b}}_1 + \bar{\hat{w}}_1 \bar{\hat{b}}_0 + \overline{\hat{w}_0' \hat{b}_1'} + \overline{\hat{w}_1' \hat{b}_0'}) = 0, \quad (\text{B.129c})$$

$$\frac{\partial \bar{\hat{v}}_1}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \bar{\hat{w}}_1}{\partial \hat{z}} = 0. \quad (\text{B.129d})$$

式 (B.128d) と境界条件より, $\bar{\hat{w}}_0 = 0$ なので, 式 (B.128) は,

$$\bar{\hat{v}}_0 = 0, \quad (\text{B.130a})$$

$$\hat{f}_0 \bar{\hat{u}}_0 = -\frac{\partial \bar{\hat{\phi}}_0}{\partial \hat{y}}, \quad (\text{B.130b})$$

$$\frac{\partial \bar{\hat{b}}_0}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\overline{\hat{v}_0' \hat{b}_0'}) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\overline{\hat{w}_0' \hat{b}_0'}) = \frac{L}{BU} \bar{S}_q, \quad (\text{B.130c})$$

$$\bar{\hat{w}}_0 = 0. \quad (\text{B.130d})$$

式 (B.129) は,

$$\frac{\partial \bar{\hat{u}}_0}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\bar{\hat{u}}'_0 \bar{\hat{v}}'_0) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\bar{\hat{u}}'_0 \bar{\hat{w}}'_0) - \hat{f}_0 \bar{\hat{v}}_1 = \frac{L}{U^2} \bar{F}_x, \quad (\text{B.131a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\bar{\hat{v}}_0'^2) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\bar{\hat{v}}'_0 \bar{\hat{w}}'_0) + \hat{f}_0 \bar{\hat{u}}_1 + \bar{\hat{u}}_0 \hat{\beta} \hat{y} = -\frac{\partial \bar{\hat{\phi}}_1}{\partial \hat{y}} + \frac{L}{U^2} \bar{F}_y, \quad (\text{B.131b})$$

$$\frac{\partial \bar{\hat{b}}_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\bar{\hat{v}}_1 \bar{\hat{b}}_0 + \overline{\hat{v}'_0 \hat{b}'_1} + \overline{\hat{v}'_1 \hat{b}'_0}) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\bar{\hat{w}}_1 \bar{\hat{b}}_0 + \overline{\hat{w}'_0 \hat{b}'_1} + \overline{\hat{w}'_1 \hat{b}'_0}) = 0, \quad (\text{B.131c})$$

$$\frac{\partial \bar{\hat{v}}_1}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \bar{\hat{w}}_1}{\partial \hat{z}} = 0. \quad (\text{B.131d})$$

ここで, $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{b}$ に東西平均をとる.

$$\hat{u} = \bar{\hat{u}} + \hat{u}', \quad (\text{B.132a})$$

$$\hat{v} = \bar{\hat{v}} + \hat{v}', \quad (\text{B.132b})$$

$$\hat{w} = \bar{\hat{w}} + \hat{w}', \quad (\text{B.132c})$$

$$\hat{b} = \bar{\hat{b}} + \hat{b}'. \quad (\text{B.132d})$$

ここで, $\bar{\hat{u}}, \hat{u}', \bar{\hat{v}}, \hat{v}', \bar{\hat{w}}, \hat{w}', \bar{\hat{b}}, \hat{b}'$ とロスビー数で展開された数の対応を考える. それぞれの変数でロスビー数が最も低いものが対応すると考えると,

$$\bar{\hat{u}} = \bar{\hat{u}}_0, \quad (\text{B.133a})$$

$$\hat{u}' = \hat{u}'_0, \quad (\text{B.133b})$$

$$\bar{\hat{v}} = Ro \bar{\hat{v}}_1, \quad (\text{B.133c})$$

$$\hat{v}' = \hat{v}'_0, \quad (\text{B.133d})$$

$$\bar{\hat{w}} = Ro \bar{\hat{w}}_1, \quad (\text{B.133e})$$

$$\hat{w}' = \hat{w}'_0, \quad (\text{B.133f})$$

$$\bar{\hat{b}} = \bar{\hat{b}}_0, \quad (\text{B.133g})$$

$$\hat{b}' = \hat{b}'_0. \quad (\text{B.133h})$$

よって, x の式, b の式, 連続の式は, 式 (B.131a), (B.130c), (B.131d) より,

$$\frac{\partial \bar{\hat{u}}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\bar{\hat{u}}'_0 \bar{\hat{v}}'_0) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\bar{\hat{u}}'_0 \bar{\hat{w}}'_0) - Ro^{-1} \hat{f}_0 \bar{\hat{v}} = \frac{L}{U^2} \bar{F}_x, \quad (\text{B.134a})$$

$$\frac{\partial \bar{\hat{b}}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}}(\bar{\hat{v}}'_0 \bar{\hat{b}}'_0) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}}(\bar{\hat{w}}'_0 \bar{\hat{b}}'_0) = \frac{L}{BU} \bar{S}_q, \quad (\text{B.134b})$$

$$Ro^{-1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \hat{y}} + Ro^{-1} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \hat{z}} = 0. \quad (\text{B.134c})$$

有次元の式に戻すと,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}) - f_0 \bar{v} = \bar{F}_x, \quad (\text{B.135a})$$

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'b'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{w'b'}) = \bar{S}_q, \quad (\text{B.135b})$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.135c})$$

となる.

ただこの式は Vallis (2006) 比較して, 式 (B.135a) では $\partial_z(\overline{u'w'})$ がなく, 式 (B.135b) では $\partial_z(\overline{w'b'})$ がなく $-N^2 \bar{w}$ があることとなっている. ただし, N は浮力振動数である. この理由としては, 準地衡流平衡を考えているのに w'_0 が残っていること, 浮力 b の展開の仕方などが考えられる.

B.5 熱の式 (B.84) の導出

この節では, Vallis(2006) にもとづき, 熱の式 (B.84) の導出を行う.

まず, 熱の式を考えるうえでの前提として, 「流体では, 局所的な熱力学平衡が成り立っている」と仮定する. 熱力学第一法則より,

$$dI = Td\eta - pd\alpha + \mu dS. \quad (\text{B.136})$$

ただし, I は単位質量当たりの内部エネルギー, p は圧力, $\alpha = \rho^{-1}$ は比容, μ は化学ポテンシャル, S は組成を表すパラメータ, η は比エントロピー, T は温度を表す. このうち, 熱の流入と組成に関する項をまとめて,

$$dI = -pd\alpha + \bar{d}Q_E. \quad (\text{B.137})$$

ただし, Q_E は加熱と組成変化からの寄与を加味した流体素片に入ってくる全エネルギーである. また, $\bar{d}$ は不完全微分を表す. ここで, 上記の仮定より式 (B.137) を物質微分⁶²⁾して,

$$\frac{DI}{Dt} + p \frac{D\alpha}{Dt} = \dot{Q}_E. \quad (\text{B.138})$$

⁶²⁾ 物質微分とは単に, ラグランジュ微分のことを指す.

ただし, $\dot{Q}_E$ は単位質量当たりの全エネルギーの流入率である. ここで, 連続の式を α を使って表した,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{B.139})$$

を用いると, 式 (B.138) は,

$$\frac{DI}{Dt} + p\alpha \nabla \cdot \mathbf{v} = \dot{Q}_E \quad (\text{B.140})$$

となる. これは, 流体における内部エネルギーの式である.

また, 流体素片の組成変化は拡散フラックスのような非保存の湧きだしや吸い込みがない限り変化しないと考えると, 全非保存項を $\dot{S}$ とすると,

$$\frac{DS}{Dt} = \dot{S} \quad (\text{B.141})$$

とかける.

ここで, 比エントロピーの時間変化について考える. 式 (B.136) を物質微分したものに式 (B.140), (B.141) を代入すると,

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{1}{T} \dot{Q}_E - \frac{\mu}{T} \dot{S} \equiv \frac{1}{T} \dot{Q} \quad (\text{B.142})$$

となり, 3 では熱の式と呼んでいる, 比エントロピーの式 (B.84) が得られた.

B.6 式 (B.115) に対する東西平均場が満たす方程式系

この節では, Vallis(2006) にもとづき, 式 (B.115) に対する東西平均場が満たす方程式系を導出する.

ここで, 各従属変数が東西平均場と擾乱場に分ける. すると各従属変数は,

$$u = \bar{u} + u', \quad (\text{B.143a})$$

$$v = \bar{v} + v', \quad (\text{B.143b})$$

$$w = \bar{w} + w', \quad (\text{B.143c})$$

$$\phi = \bar{\phi} + \phi', \quad (\text{B.143d})$$

$$F_x = \bar{F}_x + F'_x \quad (\text{B.143e})$$

とかける. よって, 式 (B.115a) は,

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + u')^2 + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u} + u')(\bar{v} + v') + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u} + u')(\bar{w} + w') - f(\bar{v} + v')$$

$$= -\frac{\partial(\bar{\phi} + \phi')}{\partial x} + \bar{F}_x + F'_x. \quad (\text{B.144})$$

ここで、東西平均をとると、 x 微分は 0 となり、さらに擾乱成分の東西平均は 0 になるため、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}\bar{w}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}) - f\bar{v} = \bar{F}_x. \quad (\text{B.145})$$

ここで、式 (B.145) の左辺第 2 項と第 4 項を取り出すと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}\bar{w}) &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\bar{v} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\bar{w} + \bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\ &= \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ &= \bar{u}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right) - \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{B.146})$$

となり、式 (B.110b) より、式 (B.146) は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}\bar{w}) &= -\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2) + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2) - \bar{v}\left(-\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2) - \bar{v}\zeta + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}^2) + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{B.147})$$

となる。ただし、 $\zeta = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{k}$ である。東西平均した項の x 微分は 0 となるので、

$$\frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}\bar{w}) = -\bar{v}\zeta + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (\text{B.148})$$

となる。よって、式 (B.148) を式 (B.145) に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}) - f\bar{v} - \bar{v}\zeta + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= \bar{F}_x, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - (f + \zeta)\bar{v} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}) + \bar{F}_x \end{aligned} \quad (\text{B.149})$$

となる。同様に y 成分、 b の式、連続の式についても同様の操作をしてまとめると、最終的にブシネスク方程式系は以下ようになる。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - (f + \zeta)\bar{v} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}) + \bar{F}_x, \quad (\text{B.150a})$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'^2}) - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v'w'}) + \bar{F}_y, \quad (\text{B.150b})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g\bar{\rho}, \quad (\text{B.150c})$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.150d})$$

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{w} \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'b'}) - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{w'b'}) + \bar{S}_q. \quad (\text{B.150e})$$

ただし、静水圧平衡の式での $\bar{\cdot}$ は東西平均ではなく、水平平均を表している。

付録 C

補足：波を記述する方程式

この付録は Andrews et al. (1987) と Longuet-Higgins and Selwyn (1968) を参考に様々な波についてまとめている [1, 10].

C.1 式 (4.10) の導出

始める方程式は,

$$\frac{Du}{Dt} - \left(\frac{u \tan \varphi}{a} + f \right) v + \frac{\Phi_\lambda}{a \cos \varphi} = X, \quad (\text{C.1a})$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{u \tan \varphi}{a} + f \right) u + \frac{\Phi_\varphi}{a} = Y, \quad (\text{C.1b})$$

$$\Phi_z = H^{-1} R \theta e^{-\kappa z/H}, \quad (\text{C.1c})$$

$$\frac{u_\lambda + (v \cos \varphi)_\varphi}{a \cos \varphi} + \frac{(\rho_0 w)_z}{\rho_0} = 0, \quad (\text{C.1d})$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = S_q. \quad (\text{C.1e})$$

ここで、各従属点数を無次元振幅パラメータ $\alpha \ll 1$ を用いて

$$u = \bar{u}_0 + u' + O(\alpha^2), \quad (\text{C.2a})$$

$$v = v' + O(\alpha^2), \quad (\text{C.2b})$$

$$w = w' + O(\alpha^2), \quad (\text{C.2c})$$

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi' + O(\alpha^2), \quad (\text{C.2d})$$

$$\theta = \bar{\theta} + \theta' + O(\alpha^2), \quad (\text{C.2e})$$

と展開する．ただし，擾乱項 $u', v', w', \Phi', \theta'$ は $O(\alpha)$ である． $O(\alpha^2)$ 以降を無視すると，式 (C.1a) は

$$\begin{aligned} & \frac{D(\bar{u}_0 + u')}{Dt} - \left(\frac{(\bar{u}_0 + u') \tan \varphi}{a} + f \right) v' + \frac{(\bar{\Phi}_0 + \Phi')_\lambda}{a \cos \varphi} \\ &= \frac{D(\bar{u}_0 + u')}{Dt} - \left(\frac{\bar{u}_0 \tan \varphi}{a} + f \right) v' + \frac{\Phi'_\lambda}{a \cos \varphi} \\ &= \frac{\partial(\bar{u}_0 + u')}{\partial t} + \frac{(\bar{u}_0 + u')}{a \cos \varphi} (\bar{u}_0 + u')_\lambda + a^{-1} v' (\bar{u}_0 + u')_\varphi + w' (\bar{u}_0 + u')_z \\ & \quad - \left(\frac{\bar{u}_0 \tan \varphi}{a} + f \right) v' + \frac{\Phi'_\lambda}{a \cos \varphi} \\ &= \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\bar{u}_0}{a \cos \varphi} u'_\lambda + a^{-1} \bar{u}_{0\varphi} v' + \bar{u}_{0z} w' - \left(\frac{\bar{u}_0 \tan \varphi}{a} + f \right) v' + \frac{\Phi'_\lambda}{a \cos \varphi} \\ &= \bar{D} u' + [(a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u}_0 \cos \varphi)_\varphi - f] v' + \bar{u}_{0z} w' + (a \cos \varphi)^{-1} \Phi'_\lambda \\ &= X'. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

ただし，

$$\bar{D} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{u}_0}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

である．式 (C.1b) は，式 (4.2b) より

$$\begin{aligned} & \frac{Dv'}{Dt} + \left(\frac{(\bar{u}_0 + u') \tan \varphi}{a} + f \right) (\bar{u}_0 + u') + \frac{(\bar{\Phi}_0 + \Phi')_\varphi}{a} \\ &= \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{(\bar{u}_0 + u')}{a \cos \varphi} v'_\lambda + \left(f + \frac{\bar{u}_0 \tan \varphi}{a} \right) \bar{u}_0 + f u' + 2\bar{u}_0 u' \tan \varphi + a^{-1} \bar{\Phi}_{0\varphi} + a^{-1} \Phi'_\varphi \\ &= \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\bar{u}_0}{a \cos \varphi} v'_\lambda + f u' + 2a^{-1} \bar{u}_0 u' \tan \varphi + a^{-1} \Phi'_\varphi \\ &= \bar{D} v' + (f + 2\bar{u}_0 a^{-1} \tan \varphi) u' + a^{-1} \Phi'_\varphi \\ &= Y'. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

式 (C.1c) は式 (4.2c) より

$$\begin{aligned} (\bar{\Phi}_0 + \Phi')_z &= H^{-1} R (\bar{\theta}_0 + \theta') e^{-\kappa z/H}, \\ \Phi'_z &= H^{-1} R \theta' e^{-\kappa z/H}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

式 (C.1d) は

$$\begin{aligned} & \frac{(\bar{u}_0 + u')_\lambda + (v' \cos \varphi)_\varphi}{a \cos \varphi} + \frac{(\rho_0 w')_z}{\rho_0} \\ &= (a \cos \varphi)^{-1} [u'_\lambda + (v' \cos \varphi)_\varphi] + \rho_0^{-1} (\rho_0 w')_z \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

式 (C.1e) は

$$\begin{aligned} & \frac{D(\bar{\theta}_0 + \theta')}{Dt} \\ &= \frac{\partial(\bar{\theta}_0 + \theta')}{\partial t} + \frac{(\bar{u}_0 + u')}{a \cos \varphi} (\bar{\theta}_0 + \theta')_\lambda + a^{-1} v' (\bar{\theta}_0 + \theta')_\varphi + w' (\bar{\theta}_0 + \theta')_z \\ &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{\bar{u}_0}{a \cos \varphi} \theta'_\lambda + a^{-1} \bar{\theta}_{0\varphi} v' + \bar{\theta}_{0z} w' \\ &= \bar{D} \theta' + a^{-1} \bar{\theta}_{0\varphi} v' + \bar{\theta}_{0z} w' \\ &= S'_q. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

まとめると,

$$\begin{aligned} & \bar{D} u' + [(a \cos \varphi)^{-1} (\bar{u}_0 \cos \varphi)_\varphi - f] v' \\ & \quad + \bar{u}_{0z} w' + (a \cos \varphi)^{-1} \Phi'_\lambda = X', \end{aligned} \quad (\text{C.8a})$$

$$\bar{D} v' + (f + 2\bar{u}_0 a^{-1} \tan \varphi) u' + a^{-1} \Phi'_\varphi = Y', \quad (\text{C.8b})$$

$$\Phi'_z = H^{-1} R \theta' e^{-\kappa z/H}, \quad (\text{C.8c})$$

$$(a \cos \varphi)^{-1} [u'_\lambda + (v' \cos \varphi)_\varphi] + \rho_0^{-1} (\rho_0 w')_z = 0, \quad (\text{C.8d})$$

$$\bar{D} \theta' + a^{-1} \bar{\theta}_{0\varphi} v' + \bar{\theta}_{0z} w' = S'_q. \quad (\text{C.8e})$$

ただし,

$$\bar{D} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{u}_0}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

である.

C.2 式 (4.18a) の下方境界条件の導出

ジオポテンシャルの定義より

$$\Phi = \int_0^{z^*} g dz^*. \quad (\text{C.9})$$

ただし、 Φ はジオポテンシャル、 z^* は幾何的距離、 g は重力加速度である。ここで

$$\Phi = \int_0^h g dz^* \approx gh \quad (\text{C.10})$$

とすると、以下の式

$$\frac{D\Phi}{Dt} = g \frac{Dh}{Dt} \quad (\text{C.11})$$

が成り立つ。ただし、 $h(\lambda, \varphi, t)$ は地表面高度である。ここで、地表面が平坦であり、 $z^* = 0$ で変動なしと仮定すると、 $\Phi_\lambda = \Phi_\varphi = 0, Dh/Dt = 0$ となるので、

$$\begin{aligned} \frac{D\Phi}{Dt} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (a \cos \varphi)^{-1} u \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + a^{-1} v \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + w \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + w \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0 \quad \text{at } z = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

帯状平均流に対する線形化を行うと、 $\bar{v} = \bar{w} = 0$ となる。また各従属変数を無次元振幅パラメータ $\alpha \ll 1$ を用いて以下のように展開する。

$$w = w'(\lambda, \varphi, z, t) + O(\alpha^2), \quad (\text{C.13})$$

$$\Phi = \bar{\Phi}_0(\varphi, z) + \Phi'(\lambda, \varphi, z, t) + O(\alpha^2) \quad (\text{C.14})$$

ただし、擾乱項 w', Φ' は $O(\alpha)$ である。このとき擾乱の一次の式は

$$\Phi'_t + w' \bar{\Phi}_{0z} = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (\text{C.15})$$

となる。式 (4.2c) と温位の定義より

$$\begin{aligned} \Phi'_t + w' \bar{\Phi}_{0z} &= 0, \\ \Phi'_t + w' H^{-1} R \bar{\theta}_0 e^{-\kappa z/H} &= 0, \\ \Phi'_t + w' H^{-1} R \bar{T}(0) &= 0 \quad \text{at } z = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

ただし、 $\bar{T}(0)$ は地表面での平均気温である。これに式 (4.14), (4.17) より

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_t e^{e/2H} U + \frac{R \bar{T}(0)}{H} e^{e/2H} W \tilde{w} &= 0, \\ \frac{dW}{dz} - \frac{W}{2H} + \frac{R \bar{T}(0)}{H} \frac{W}{gh} &= 0, \\ \frac{dW}{dz} + \left(\frac{R \bar{T}(0)}{gh} - \frac{1}{2} \right) \frac{W}{H} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

となり、式 (4.18a) の下方境界条件の導出ができた。

C.3 式 (4.20a), (4.20b), (4.21a) の導出

始める式は,

$$\tilde{u}_t - f\tilde{v} + (a \cos \varphi)^{-1} \tilde{\Phi}_\lambda = 0, \quad (\text{C.18a})$$

$$\tilde{v}_t + f\tilde{u} + a^{-1} \tilde{\Phi}_\varphi = 0, \quad (\text{C.18b})$$

$$(a \cos \varphi)^{-1} [\tilde{u}_\lambda + (\tilde{v} \cos \varphi)_\varphi] + (gh)^{-1} \tilde{\Phi}_t = 0. \quad (\text{C.18c})$$

これは本資料の (4.15) である.

まずこの方程式の解を

$$\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\Phi}\} = \Re \left[\left\{ \hat{u}(\varphi), \hat{v}(\varphi), \hat{\Phi}(\varphi) \right\} (\exp i(s\lambda - 2\Omega\sigma t)) \right] \quad (\text{C.19})$$

と仮定して式 (C.18a), (C.18b) を $\hat{u}, \hat{v}$ について解くと, まず式 (C.18a) より

$$\begin{aligned} -2\Omega\sigma i \hat{u} - f\hat{v} + (a \cos \varphi)^{-1} \hat{\Phi} s i &= 0, \\ -2\Omega\sigma i \hat{u} - 2\Omega \sin \varphi \hat{v} + (a \cos \varphi)^{-1} \hat{\Phi} s i &= 0, \\ \hat{u} &= (2\Omega\sigma a \cos \varphi)^{-1} s \hat{\Phi} - (\sigma i)^{-1} \sin \varphi \cdot \hat{v}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

また, 式 (C.18b) より,

$$\begin{aligned} -2\Omega\sigma i \hat{v} + f\hat{u} + a^{-1} \hat{\Phi}_\varphi &= 0, \\ -2\Omega\sigma i \hat{v} + 2\Omega \sin \varphi \hat{u} + a^{-1} \hat{\Phi}_\varphi &= 0, \\ \hat{v} &= (\sigma i)^{-1} \sin \varphi \cdot \hat{u} + (2\Omega\sigma a i)^{-1} \hat{\Phi}_\varphi. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

式 (C.20) に式 (C.21) を代入し,

$$\begin{aligned} \hat{u} &= (2\Omega\sigma a \cos \varphi)^{-1} s \hat{\Phi} - (\sigma i)^{-1} \sin \varphi \cdot \left[(\sigma i)^{-1} \sin \varphi \cdot \hat{u} + (2\Omega\sigma a i)^{-1} \hat{\Phi}_\varphi \right] \\ &= (2\Omega\sigma a \cos \varphi)^{-1} s \hat{\Phi} + \sigma^{-2} \sin^2 \varphi \cdot \hat{u} + (2\Omega\sigma^2 a)^{-1} \sin \varphi \cdot \hat{\Phi}_\varphi, \\ 2\Omega\sigma^2 a \hat{u} &= \cos^{-1} \varphi \cdot \sigma s \hat{\Phi} + 2\Omega a \sin^2 \varphi \cdot \hat{u} + \sin \varphi \cdot \hat{\Phi}_\varphi, \\ 2\Omega a (\sigma^2 - \sin^2 \varphi) \hat{u} &= \cos^{-1} \varphi \cdot \sigma s \hat{\Phi} + \sin \varphi \cdot \hat{\Phi}_\varphi, \\ \hat{u} &= [2\Omega a (\sigma^2 - \sin^2 \varphi)]^{-1} \left[\cos^{-1} \varphi \cdot \sigma s \hat{\Phi} + \sin \varphi \cdot \hat{\Phi}_\varphi \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

同様に式 (C.21) に式 (C.20) を代入すると,

$$\hat{v} = - [2\Omega a (\sigma^2 - \sin^2 \varphi)]^{-1} i [\tan \varphi \cdot s \hat{\Phi} + \sigma \hat{\Phi}_\varphi] . \quad (\text{C.23})$$

ここで, $\mu \equiv \sin \varphi$ を導入する. すると, $\cos \varphi d\varphi = d\mu$ となる. そして, μ による微分を添え字で表すこととする.

式 (C.18c) に式 (C.22), (C.23) を代入し

$$\begin{aligned} (a \cos \varphi)^{-1} & \left[\frac{\cos^{-1} \varphi \cdot \sigma s \hat{\Phi} + \mu \hat{\Phi}_\varphi}{2\Omega a (\sigma^2 - \mu^2)} s i + \left\{ -\frac{i (\tan \varphi \cdot s \hat{\Phi} + \sigma \hat{\Phi}_\varphi)}{2\Omega a (\sigma^2 - \mu^2)} \right\}_\varphi \cos \varphi \right. \\ & \quad \left. - \left\{ -\frac{i (\tan \varphi \cdot s \hat{\Phi} + \sigma \hat{\Phi}_\varphi)}{2\Omega a (\sigma^2 - \mu)} \right\} \mu \right] - (gh)^{-1} \hat{\Phi} 2\Omega \sigma i = 0 , \\ \sigma^{-1} & \left[-\frac{(1 - \mu^2)^{-1} \sigma s \hat{\Phi} + \mu \hat{\Phi}_\mu}{\sigma^2 - \mu^2} s + \left\{ \frac{\tan \varphi \cdot s \hat{\Phi} + \sigma \hat{\Phi}_\varphi}{\sigma^2 - \mu^2} \right\}_\varphi \right. \\ & \quad \left. - \left\{ \frac{\mu (1 - \mu^2)^{-1} s \hat{\Phi} + \sigma \hat{\Phi}_\mu}{\sigma^2 - \mu^2} \right\} \mu \right] + \frac{4\Omega^2 a^2}{gh} \hat{\Phi} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

ここで, ラムのパラメータ $\gamma \equiv 4\Omega^2 a^2 / gh$ を導入する. また, 式 (C.24) の左辺第 2 項は

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\tan \varphi \cdot s \hat{\Phi} + \sigma \hat{\Phi}_\varphi}{\sigma^2 - \mu^2} \right\}_\varphi \\ &= \frac{(1 - \mu^2)^{-1} s \hat{\Phi} + \mu s \hat{\Phi}_\mu + \sigma \hat{\Phi}_{\varphi\varphi}}{\sigma^2 - \mu^2} + 2 \frac{\mu^2 s \hat{\Phi} + \mu (1 - \mu^2) \sigma \hat{\Phi}_\mu}{(\sigma^2 - \mu^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

となるため, 式 (C.24) は

$$\begin{aligned} & \sigma^{-1} \left[-\frac{(1 - \mu^2)^{-1} \sigma s \hat{\Phi} + \mu \hat{\Phi}_\mu}{\sigma^2 - \mu^2} s + \left\{ \frac{(1 - \mu^2)^{-1} s \hat{\Phi} + \mu s \hat{\Phi}_\mu + \sigma \hat{\Phi}_{\varphi\varphi}}{\sigma^2 - \mu^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2 \frac{\mu^2 s \hat{\Phi} + \mu (1 - \mu^2) \sigma \hat{\Phi}_\mu}{(\sigma^2 - \mu^2)^2} \right\} - \left\{ \frac{\mu (1 - \mu^2)^{-1} s \hat{\Phi} + \sigma \hat{\Phi}_\mu}{\sigma^2 - \mu^2} \right\} \mu \right] + \frac{4\Omega^2 a^2}{gh} \hat{\Phi} = 0 , \\ & \frac{1}{\sigma (\sigma^2 - \mu^2)} \left[-\frac{\sigma s^2 \hat{\Phi}}{1 - \mu^2} - s \mu \hat{\Phi}_\mu + \frac{s \hat{\Phi}}{1 - \mu^2} + \mu s \hat{\Phi}_\mu + \sigma \hat{\Phi}_{\varphi\varphi} \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{\mu^2 s \hat{\Phi} + \mu (1 - \mu^2) \sigma \hat{\Phi}_\mu}{\sigma^2 - \mu^2} - \frac{\mu^2 s \hat{\Phi}}{1 - \mu^2} - \sigma \mu \hat{\Phi}_\mu \right] + \gamma \hat{\Phi} = 0 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sigma(\sigma^2 - \mu^2)} \left[-\frac{\sigma s^2 \hat{\Phi}}{1 - \mu^2} + s \hat{\Phi} + \sigma \hat{\Phi}_{\varphi\varphi} + 2 \frac{\mu^2 s \hat{\Phi}}{\sigma^2 - \mu^2} \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{\mu(1 - \mu^2) \sigma \hat{\Phi}_\mu}{\sigma^2 - \mu^2} - \sigma \mu \hat{\Phi}_\mu \right] + \gamma \hat{\Phi} = 0, \\
& -\frac{\hat{\Phi}}{\sigma^2 - \mu^2} \left[\frac{s^2}{1 - \mu^2} + \frac{-s(\sigma^2 + \mu^2)}{\sigma(\sigma^2 - \mu^2)} \right] \\
& \quad + \frac{1}{\sigma^2 - \mu^2} \left[\hat{\Phi}_{\varphi\varphi} + 2 \frac{\mu(1 - \mu^2) \hat{\Phi}_\mu}{\sigma^2 - \mu^2} - \mu \hat{\Phi}_\mu \right] + \gamma \hat{\Phi} = 0.
\end{aligned} \tag{C.26}$$

ここで、 μ の二階常微分作用素 $\mathcal{L}$ を以下のように定義する.

$$\mathcal{L} = \frac{d}{d\mu} \left[\frac{1 - \mu^2}{\sigma^2 - \mu^2} \frac{d}{d\mu} \right] - \frac{1}{\sigma^2 - \mu^2} \left[\frac{s^2}{1 - \mu^2} + \frac{-s(\sigma^2 + \mu^2)}{\sigma(\sigma^2 - \mu^2)} \right]. \tag{C.27}$$

すると、 $\mathcal{L}\hat{\Phi}$ は

$$\mathcal{L}\hat{\Phi} = \frac{d}{d\mu} \left[\frac{1 - \mu^2}{\sigma^2 - \mu^2} \hat{\Phi}_\mu \right] - \frac{\hat{\Phi}}{\sigma^2 - \mu^2} \left[\frac{s^2}{1 - \mu^2} + \frac{-s(\sigma^2 + \mu^2)}{\sigma(\sigma^2 - \mu^2)} \right]. \tag{C.28}$$

ここで、 $\hat{\Phi}_{\mu\mu}$ は $\hat{\Phi}_\mu, \hat{\Phi}_{\varphi\varphi}$ を用いて

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_{\mu\mu} &= \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{\hat{\Phi}_\varphi}{\cos \varphi} \right)_\varphi \\
&= \frac{\hat{\Phi}_{\varphi\varphi}}{1 - \mu^2} + \frac{\mu \hat{\Phi}_\mu}{1 - \mu^2}
\end{aligned} \tag{C.29}$$

と表せるため、式 (C.28) の右辺第 1 項は、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\mu} \left[\frac{1 - \mu^2}{\sigma^2 - \mu^2} \hat{\Phi}_\mu \right] &= \frac{-2\mu(\sigma^2 - \mu^2) + 2\mu(1 - \mu^2)}{(\sigma^2 - \mu^2)^2} \hat{\Phi}_\mu + \frac{1 - \mu^2}{\sigma^2 - \mu^2} \hat{\Phi}_{\mu\mu} \\
&= -\frac{\mu \hat{\Phi}_\mu}{\sigma^2 - \mu^2} + \frac{2\mu(1 - \mu^2)}{(\sigma^2 - \mu^2)^2} \hat{\Phi}_\mu + \frac{\hat{\Phi}_{\varphi\varphi}}{\sigma^2 - \mu^2} \\
&= \frac{1}{\sigma^2 - \mu^2} \left[\hat{\Phi}_{\varphi\varphi} + 2 \frac{\mu(1 - \mu^2) \hat{\Phi}_\mu}{\sigma^2 - \mu^2} - \mu \hat{\Phi}_\mu \right].
\end{aligned} \tag{C.30}$$

つまり、

$$\mathcal{L}\hat{\Phi} = \frac{1}{\sigma^2 - \mu^2} \left[\hat{\Phi}_{\varphi\varphi} + 2 \frac{\mu(1 - \mu^2) \hat{\Phi}_\mu}{\sigma^2 - \mu^2} - \mu \hat{\Phi}_\mu \right]$$

$$-\frac{\hat{\Phi}}{\sigma^2 - \mu^2} \left[\frac{s^2}{1 - \mu^2} + \frac{-s(\sigma^2 + \mu^2)}{\sigma(\sigma^2 - \mu^2)} \right]. \quad (\text{C.31})$$

まとめると,

$$\mathcal{L}\hat{\Phi} + \gamma\hat{\Phi} = 0. \quad (\text{C.32})$$

ただし,

$$\mathcal{L} = \frac{d}{d\mu} \left[\frac{1 - \mu^2}{\sigma^2 - \mu^2} \frac{d}{d\mu} \right] - \frac{1}{\sigma^2 - \mu^2} \left[\frac{s^2}{1 - \mu^2} + \frac{-s(\sigma^2 + \mu^2)}{\sigma(\sigma^2 - \mu^2)} \right] \quad (\text{C.33})$$

は $\mu \equiv \sin \varphi$ ($-1 \leq \mu \leq 1$) に関する二階常微分作用素である.

C.4 式 (4.31) の導出

始める式は,

$$u'_t - fv' + (a \cos \varphi)^{-1} \Phi'_\lambda = X', \quad (\text{C.34a})$$

$$v'_t + fu' + a^{-1} \Phi'_\varphi = Y', \quad (\text{C.34b})$$

$$(a \cos \varphi)^{-1} \left[u'_\lambda + (v' \cos \varphi)_\varphi \right] + \rho_0^{-1} (\rho_0 w')_z = 0, \quad (\text{C.34c})$$

$$\Phi'_{zt} + N^2 w' = \kappa J' / H \quad (\text{C.34d})$$

これは本資料の (4.13) である.

今回は日周加熱強制項による影響を考えていく. 散逸項に対して, $X' = Y' = 0$ とし, すべての変数に $e^{-\lambda - \Omega t}$ の日周依存性を与える. つまり, 以下のように表せるとする.

$$u' = u^{(1)} e^{-\lambda - \Omega t}, \quad (\text{C.35a})$$

$$v' = v^{(1)} e^{-\lambda - \Omega t}, \quad (\text{C.35b})$$

$$w' = w^{(1)} e^{-\lambda - \Omega t}, \quad (\text{C.35c})$$

$$\Phi' = \Phi^{(1)} e^{-\lambda - \Omega t}, \quad (\text{C.35d})$$

$$J' = J^{(1)} e^{-\lambda - \Omega t}. \quad (\text{C.35e})$$

式 (C.34a), (C.34b) に式 (C.35) を代入して, $u^{(1)}, v^{(1)}$ を $\Phi^{(1)}$ で表していく. ただし, $\mu \equiv \sin \varphi$ である.

$$u'_t - fv' + (a \cos \varphi)^{-1} \Phi'_\lambda = 0,$$

$$\begin{aligned}
& -i\Omega u^{(1)} e^{-\lambda-\Omega t} - f v^{(1)} e^{-\lambda-\Omega t} \\
& -i(a \cos \varphi)^{-1} \Phi^{(1)} e^{-\lambda-\Omega t} = 0, \\
& i\Omega u^{(1)} = 2\Omega \mu v^{(1)} + i(a \cos \varphi)^{-1} \Phi^{(1)}, \\
& u^{(1)} = -(i\Omega)^{-1} \left[2\Omega \mu v^{(1)} + i(a \cos \varphi)^{-1} \Phi^{(1)} \right]. \quad (\text{C.36})
\end{aligned}$$

同様に,

$$v^{(1)} = (i\Omega)^{-1} \left[2\Omega \mu u^{(1)} + a^{-1} \Phi_{\varphi}^{(1)} \right]. \quad (\text{C.37})$$

式 (C.36) に式 (C.37) を代入すると

$$\begin{aligned}
& u^{(1)} = -(i\Omega)^{-1} \left[2\Omega \mu (i\Omega)^{-1} \left\{ 2\Omega \mu u^{(1)} + a^{-1} \Phi_{\varphi}^{(1)} \right\} + i(a \cos \varphi)^{-1} \Phi^{(1)} \right], \\
& \Omega^2 u^{(1)} = 4\Omega^2 \mu^2 u^{(1)} + 2a^{-1} \Omega \mu \Phi_{\varphi}^{(1)} - (a \cos \varphi)^{-1} \Omega \Phi^{(1)}, \\
& \Omega (1 - 4\mu^2) u^{(1)} = (a \cos \varphi)^{-1} \left[2\mu \Phi_{\varphi}^{(1)} \cos \varphi - \Phi^{(1)} \right], \\
& u^{(1)} = \{ a\Omega (1 - 4\mu^2) \cos \varphi \}^{-1} \left[2\mu (1 - \mu^2) \Phi_{\mu}^{(1)} - \Phi^{(1)} \right]. \quad (\text{C.38})
\end{aligned}$$

同様に式 (C.37) に式 (C.36) を代入すると

$$v^{(1)} = i \{ a\Omega (1 - 4\mu^2) \cos \varphi \}^{-1} \left[- (1 - \mu^2) \Phi_{\mu}^{(1)} + 2\mu \Phi^{(1)} \right]. \quad (\text{C.39})$$

そして, $\Phi^{(1)}$ を $w^{(1)}, J^{(1)}$ で表していく. 式 (C.34d) に式 (C.35) を代入すると

$$\begin{aligned}
& -i\Omega \Phi_z^{(1)} e^{-\lambda-\Omega t} + N^2 w^{(1)} e^{-\lambda-\Omega t} = \kappa J^{(1)} e^{-\lambda-\Omega t} / H, \\
& -i\Omega \Phi_z^{(1)} = \kappa J^{(1)} / H - N^2 w^{(1)} \quad (\text{C.40})
\end{aligned}$$

となる. ここで一度次の計算のために $v_{\mu}^{(1)}$ を計算しておく.

$$\begin{aligned}
& v_{\mu}^{(1)} \\
& = i \{ a\Omega (1 - 4\mu^2) \cos \varphi \}_{\mu}^{-1} \left[- (1 - \mu^2) \Phi_{\mu}^{(1)} + 2\mu \Phi^{(1)} \right] \\
& \quad + i \{ a\Omega (1 - 4\mu^2) \cos \varphi \}^{-1} \left[- (1 - \mu^2) \Phi_{\mu}^{(1)} + 2\mu \Phi^{(1)} \right]_{\mu} \\
& = -i \frac{a\Omega \left[- (1 - \mu^2) \Phi_{\mu}^{(1)} + 2\mu \Phi^{(1)} \right] \{ -8\mu^2 \cos \varphi - \mu (1 - 4\mu^2) \cos^{-1} \varphi \}}{\{ a\Omega (1 - 4\mu^2) \cos \varphi \}^2} \\
& \quad + i \frac{- (1 - \mu^2) \Phi_{\mu\mu}^{(1)} + 2\mu \Phi_{\mu}^{(1)} + 2\mu \Phi_{\mu}^{(1)} + 2\Phi^{(1)}}{a\Omega (1 - 4\mu^2) \cos \varphi} \\
& = i \frac{16\mu^2 \Phi^{(1)} - 8\mu \Phi_{\mu}^{(1)} + 8\mu^3 \Phi_{\mu}^{(1)} + 2\mu^2 (1 - 4\mu^2) (1 - \mu^2)^{-1} \Phi^{(1)} - \mu \Phi_{\mu}^{(1)} + 4\mu^3 \Phi_{\mu}^{(1)}}{a\Omega (1 - 4\mu^2)^2 \cos \varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i \frac{-(1-4\mu^2)(1-\mu^2)\Phi_{\mu\mu}^{(1)} + 2\Phi^{(1)} - 8\mu^2\Phi^{(1)} + 4\mu\Phi_\mu^{(1)} - 16\mu^3\Phi_\mu^{(1)}}{a\Omega(1-4\mu^2)^2 \cos \varphi} \\
& = i \frac{-(1-4\mu^2)(1-\mu^2)\Phi_{\mu\mu}^{(1)} + \{-4\mu^3 - 5\mu\}\Phi_\mu^{(1)} + \{8\mu^2 + 2 + 2\mu^2(1-4\mu^2)(1-\mu^2)^{-1}\}\Phi^{(1)}}{a\Omega(1-4\mu^2)^2 \cos \varphi} .
\end{aligned} \tag{C.41}$$

これに伴って, $u^{(1)}$ と $v^{(1)}$ も書き直すと,

$$u^{(1)} = \frac{(8\mu^5 - 10\mu^3 + 2\mu)\Phi_\mu^{(1)} + (-1 + 4\mu^2)\Phi^{(1)}}{a\Omega(1-4\mu^2)^2 \cos \varphi}, \tag{C.42}$$

$$v^{(1)} = i \frac{(-4\mu^4 + 5\mu^2 - 1)\Phi_\mu^{(1)} + (2\mu - 8\mu^3)\Phi^{(1)}}{a\Omega(1-4\mu^2)^2 \cos \varphi}. \tag{C.43}$$

式 (C.42), (C.43), (C.41) より, 式 (C.34c) は

$$\begin{aligned}
& (a \cos \varphi)^{-1} \left[-iu^{(1)} + (1-\mu^2)v_\mu^{(1)} - \mu v^{(1)} \right] - \frac{w^{(1)}}{H} + w_z^{(1)} = 0, \\
& i \left[a^2 \Omega (1-4\mu^2)^2 (1-\mu^2) \right]^{-1} \left[(-8\mu^5 + 10\mu^3 - 2\mu)\Phi_\mu^{(1)} + (-4\mu^2 + 1)\Phi^{(1)} \right. \\
& \quad + (1-\mu^2) \left[-(1-4\mu^2)(1-\mu^2)\Phi_{\mu\mu}^{(1)} + \{-4\mu^3 - 5\mu\}\Phi_\mu^{(1)} \right. \\
& \quad \left. \left. + \{8\mu^2 + 2 + 2\mu^2(1-4\mu^2)(1-\mu^2)^{-1}\}\Phi^{(1)} \right] + (4\mu^5 - 5\mu^3 + \mu)\Phi_\mu^{(1)} \right. \\
& \quad \left. + (-2\mu^2 + 8\mu^4)\Phi^{(1)} \right] - \frac{w^{(1)}}{H} + w_z^{(1)} = 0, \\
& i \left[a^2 \Omega (1-4\mu^2)^2 (1-\mu^2) \right]^{-1} \left[(-8\mu^5 + 10\mu^3 - 2\mu)\Phi_\mu^{(1)} + (-4\mu^2 + 1)\Phi^{(1)} \right. \\
& \quad - (1-4\mu^2)(1-\mu^2)^2\Phi_{\mu\mu}^{(1)} + \{4\mu^5 + \mu^3 - 5\mu\}\Phi_\mu^{(1)} + \{-16\mu^4 + 8\mu^2 + 2\}\Phi^{(1)} \\
& \quad \left. + (4\mu^5 - 5\mu^3 + \mu)\Phi_\mu^{(1)} + (-2\mu^2 + 8\mu^4)\Phi^{(1)} \right] - \frac{w^{(1)}}{H} + w_z^{(1)} = 0, \\
& i \left[a^2 \Omega (1-4\mu^2)^2 (1-\mu^2) \right]^{-1} \left[-(1-4\mu^2)(1-\mu^2)^2\Phi_{\mu\mu}^{(1)} - 6\mu(1-\mu^2)\Phi_\mu^{(1)} \right. \\
& \quad \left. + (-8\mu^4 + 2\mu^2 + 3)\Phi^{(1)} \right] - \frac{w^{(1)}}{H} + w_z^{(1)} = 0, \\
& i \left[a^2 \Omega (1-4\mu^2)^2 (1-\mu^2) \right]^{-1} \mathcal{R}^{(1)}\Phi^{(1)} - \frac{w^{(1)}}{H} + w_z^{(1)} = 0.
\end{aligned} \tag{C.44}$$

ただし,

$$\mathcal{R}^{(1)} = -(1-4\mu^2)(1-\mu^2)^2 \frac{d^2}{d\mu^2} - 6\mu(1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} + (-8\mu^4 + 2\mu^2 + 3) \tag{C.45}$$

である．ここで， $\Theta_n^{(1)}$ に対応する $\mathcal{L}^{(1)}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(1)} &= \frac{d}{d\mu} \left[4 \frac{1-\mu^2}{1-4\mu^2} \frac{d}{d\mu} \right] - \frac{4}{1-4\mu^2} \left[\frac{2(1+4\mu^2)}{1-4\mu^2} + \frac{1}{1-\mu^2} \right] \\ &= 4 \frac{1-\mu^2}{1-4\mu^2} \frac{d^2}{d\mu^2} + \frac{24\mu}{(1-4\mu^2)^2} \frac{d}{d\mu} - \frac{4}{1-4\mu^2} \left[\frac{8\mu^2+2}{1-4\mu^2} + \frac{1}{1-\mu^2} \right].\end{aligned}\quad (\text{C.46})$$

つまり

$$\begin{aligned}& \frac{(1-4\mu^2)^2 (1-\mu^2)}{4} \mathcal{L}^{(1)} \\ &= (1-4\mu^2) (1-\mu^2)^2 \frac{d^2}{d\mu^2} + 6\mu (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} + (-8\mu^2 - 2 + 8\mu^4 + 2\mu^2 - 1 + 4\mu^2) \\ &= (1-4\mu^2) (1-\mu^2)^2 \frac{d^2}{d\mu^2} + 6\mu (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} + (8\mu^4 - 10\mu^2 - 3) \\ &= -\mathcal{R}^{(1)}.\end{aligned}\quad (\text{C.47})$$

よって，式 (C.44) は

$$\begin{aligned}-i [4a^2\Omega]^{-1} \mathcal{L}^{(1)} \Phi^{(1)} - \frac{w^{(1)}}{H} + w_z^{(1)} &= 0, \\ [4a^2\Omega^2]^{-1} \mathcal{L}^{(1)} \left\{ -i\Omega \Phi^{(1)} \right\} - \frac{w^{(1)}}{H} + w_z^{(1)} &= 0\end{aligned}\quad (\text{C.48})$$

となる．式 (C.48) を z で偏微分して式 (C.40) を用いると

$$[4a^2\Omega^2]^{-1} \mathcal{L}^{(1)} \left\{ \frac{\kappa J_n^{(1)}}{H} - N^2 w^{(1)} \right\} - \frac{w_z^{(1)}}{H} + w_{zz}^{(1)} = 0. \quad (\text{C.49})$$

さらに式 (4.29), (4.30) を代入し n 番目について取り出して考えると

$$\begin{aligned}& [4a^2\Omega^2]^{-1} \mathcal{L}^{(1)} \left\{ \frac{\kappa J_n^{(1)}(z) \Theta_n^{(1)}(\mu)}{H} - N^2 e^{z/2H} W_n^{(1)}(z) \Theta_n^{(1)}(\mu) \right\} \\ & - \frac{\left(e^{z/2H} W_n^{(1)}(z) \Theta_n^{(1)}(\mu) \right)}{H} + \left\{ e^{z/2H} W_n^{(1)}(z) \Theta_n^{(1)}(\mu) \right\}_{zz} = 0, \\ & [4a^2\Omega^2]^{-1} \left\{ \frac{\kappa J_n^{(1)}(z)}{H} - N^2 e^{z/2H} W_n^{(1)}(z) \right\} \mathcal{L}^{(1)} \Theta_n^{(1)}(\mu) \\ & - \left[\frac{\left(e^{z/2H} W_n^{(1)}(z) \right)_z}{H} - \left\{ e^{z/2H} W_n^{(1)}(z) \right\}_{zz} \right] \Theta_n^{(1)}(\mu) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [4a^2\Omega^2]^{-1} \left\{ \frac{\kappa J_n^{(1)}(z)e^{-z/2H}}{H} - N^2 W_n^{(1)}(z) \right\} e^{z/2H} \mathcal{L}^{(1)} \Theta_n^{(1)}(\mu) \\
& - \left[\frac{W_n^{(1)}}{2H^2} + \frac{W_{nz}^{(1)}}{H} - \frac{W_n^{(1)}}{4H^2} - \frac{W_{nz}^{(1)}}{H} - W_{nzz}^{(1)} \right] e^{z/2H} \Theta_n^{(1)}(\mu) = 0, \\
& \left\{ \frac{\kappa J_n^{(1)}(z)e^{-z/2H}}{H} - N^2 W_n^{(1)}(z) \right\} [4a^2\Omega^2]^{-1} \mathcal{L}^{(1)} \Theta_n^{(1)}(\mu) \\
& - \left[\frac{W_n^{(1)}}{4H^2} - W_{nzz}^{(1)} \right] \Theta_n^{(1)}(\mu) = 0. \tag{C.50}
\end{aligned}$$

ここで、 $\Theta_n^{(1)}$ に対応するラプラスの潮汐方程式を考える.

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{(1)} \Theta_n^{(1)} + \gamma_n^{(1)} \Theta_n^{(1)} = 0, \\
& \mathcal{L}^{(1)} \Theta_n^{(1)} = -\frac{4a^2\Omega^2}{gh_n^{(1)}} \Theta_n^{(1)}, \\
& (4a^2\Omega^2)^{-1} \mathcal{L}^{(1)} \Theta_n^{(1)} = -\frac{\Theta_n^{(1)}}{gh_n^{(1)}} \tag{C.51}
\end{aligned}$$

より、式 (C.50) は

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{\kappa J_n^{(1)} e^{-z/2H}}{gHh_n^{(1)}} + \frac{N^2}{gh_n^{(1)}} W_n^{(1)}(z) - \frac{W_n^{(1)}}{4H^2} + W_{nzz}^{(1)} \right] \Theta_n^{(1)}(\mu) = 0, \\
& -\frac{\kappa J_n^{(1)} e^{-z/2H}}{gHh_n^{(1)}} + \frac{N^2}{gh_n^{(1)}} W_n^{(1)}(z) - \frac{W_n^{(1)}}{4H^2} + W_{nzz}^{(1)} = 0, \\
& \frac{d^2 W_n^{(1)}}{dz^2} + \left[\frac{N^2}{gh_n^{(1)}} - \frac{1}{4H^2} \right] W_n^{(1)} = \frac{\kappa J_n^{(1)} e^{-z/2H}}{gHh_n^{(1)}} \tag{C.52}
\end{aligned}$$

となり、式 (4.31) の導出ができた.

C.5 鉛直伝播擾乱の平均波エネルギーの減衰の証明

鉛直伝播擾乱の平均波エネルギーは以下のように表される.

$$\frac{1}{2} \rho_0 (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{\Phi'^2}/N^2)$$

高度は $z > z_{\text{upper}}$ を考えているので、 $N^2 = N_\infty^2$ は定数となる．この式に式 (4.14a), (4.17a) を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho_0(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{\Phi'^2}/N_\infty^2) &= \frac{1}{2}\rho_0(\overline{\tilde{u}^2} + \overline{\tilde{v}^2} + \overline{\tilde{\Phi}^2}/N_\infty^2)e^{z/H}U^2, \\ &= \frac{1}{2}\rho_0(\overline{\tilde{u}^2} + \overline{\tilde{v}^2} + \overline{\tilde{\Phi}^2}/N_\infty^2)e^{z/H} \left(W_{nz}^{(1)} - \frac{W_n^{(1)}}{2H} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

この式の両辺を z で偏微分して式 (4.18a) と $\rho_0 \propto e^{-z/H}$ を用いると

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2}\rho_0(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{\Phi'^2}/N_\infty^2) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2}\rho_0(\overline{\tilde{u}^2} + \overline{\tilde{v}^2} + \overline{\tilde{\Phi}^2}/N_\infty^2)e^{z/H} \left(W_{nz}^{(1)} - \frac{W_n^{(1)}}{2H} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}(\overline{\tilde{u}^2} + \overline{\tilde{v}^2} + \overline{\tilde{\Phi}^2}/N_\infty^2) \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_0 e^{z/H} \left(W_{nz}^{(1)} - \frac{W_n^{(1)}}{2H} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}(\overline{\tilde{u}^2} + \overline{\tilde{v}^2} + \overline{\tilde{\Phi}^2}/N_\infty^2) \left[-\frac{\rho_0}{H} e^{z/H} \left(W_{nz}^{(1)} - \frac{W_n^{(1)}}{2H} \right)^2 + \rho_0 \frac{e^{z/H}}{H} \left(W_{nz}^{(1)} - \frac{W_n^{(1)}}{2H} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\rho_0 e^{z/H} \left(W_{nz}^{(1)} - \frac{W_n^{(1)}}{2H} \right) \left(W_{nzz}^{(1)} - \frac{W_{nz}^{(1)}}{2H} \right) \right] \\ &= (\overline{\tilde{u}^2} + \overline{\tilde{v}^2} + \overline{\tilde{\Phi}^2}/N_\infty^2) \rho_0 e^{z/H} \left(W_{nz}^{(1)} - \frac{W_n^{(1)}}{2H} \right) \left(W_{nzz}^{(1)} - \frac{W_{nz}^{(1)}}{2H} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

ここで、解の形として指数関数的解

$$W_n^{(1)} \propto e^{-mz}, \quad (\text{C.55a})$$

$$m = \left[\frac{1}{4H^2} - \frac{N^2}{gh} \right]^{1/2} \quad (\text{C.55b})$$

を考えると式 (C.54) は

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2}\rho_0(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{\Phi'^2}/N_\infty^2) \right] \\ &= (\overline{\tilde{u}^2} + \overline{\tilde{v}^2} + \overline{\tilde{\Phi}^2}/N_\infty^2) \rho_0 e^{z/H} \left(-mW_n^{(1)} - \frac{W_n^{(1)}}{2H} \right) \left(m^2W_n^{(1)} + \frac{mW_n^{(1)}}{2H} \right) \\ &= -(\overline{\tilde{u}^2} + \overline{\tilde{v}^2} + \overline{\tilde{\Phi}^2}/N_\infty^2) mW_n^{(1)^2} \rho_0 e^{z/H} \left(m + \frac{1}{2H} \right)^2 \end{aligned}$$

$$<0 \tag{C.56}$$

となり，鉛直伝播擾乱の平均波エネルギーは高度と共に減少すると分かる．

参考文献

- [1] D. G. Andrews, et al. *Middle Atmosphere Dynamics*. Academic Press, 1987.
- [2] S. Chapman and R. S. Lindzen. *Atmospheric Tides*. Springer Dordrecht, 1970.
- [3] T. Horinouchi, et al. Image velocimetry for clouds with relaxation labeling based on deformation consistency. *Measurement science and technology*, Vol. 28, No. 8, p. 085301, 2017.
- [4] T. Horinouchi, et al. Mean winds at the cloud top of Venus obtained from two-wavelength UV imaging by Akatsuki. *Earth, Planets and Space*, Vol. 70, , January 2018.
- [5] T. Horinouchi, et al. How waves and turbulence maintain the super-rotation of Venus' atmosphere. *Science*, Vol. 368, No. 6489, pp. 405–409, 2020.
- [6] R. Hueso, et al. Assessing the long-term variability of venus winds at cloud level from virtis–venus express. *Icarus*, Vol. 217, No. 2, pp. 585–598, 2012.
- [7] S. Ikegawa and T. Horinouchi. Improved automatic estimation of winds at the cloud top of venus using superposition of cross-correlation surfaces. *Icarus*, Vol. 271, pp. 98–119, 2016.
- [8] V. V. Kerzhanovich and S. S. Limaye. Circulation of the atmosphere from the surface to 100 km. *Advances in Space Research*, Vol. 5, No. 11, pp. 59–83, 1985.
- [9] T. Kouyama, et al. Global structure of thermal tides in the upper cloud layer of venus revealed by lir on board akatsuki. *Geophysical Research Letters*, Vol. 46, No. 16, pp. 9457–9465, 2019.
- [10] M. S. Longuet-Higgins. The eigenfunctions of Laplace's tidal equation over a sphere. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 262, No. 1132, 1968.

- [11] V.I. Moroz, et al. Solar and thermal radiation in the Venus atmosphere. *Advances in Space Research*, Vol. 5, No. 11, pp. 197–232, 1985.
- [12] NASA. Venus: Facts - NASA science. <https://science.nasa.gov/venus/venus-facts/> [アクセス日：2026/01/26].
- [13] A. Sánchez-Lavega, et al. The atmospheric dynamics of Venus. *Space Sci. Rev.*, Vol. 212, pp. 1541–1616, 2017.
- [14] G. Schubert. General circulation and the dynamical state of the Venus atmosphere. In *VENUS*. University of Arizona Press, 1983.
- [15] M. Takagi, et al. Three-dimensional structures of thermal tides simulated by a venus gcm. *Journal of Geophysical Research: Planets*, Vol. 123, No. 2, pp. 335–352, 2018.
- [16] F. W. Taylor, et al. Structure and meteorology of the middle atmosphere of venus: Infrared remote sensing from the pioneer orbiter. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, Vol. 85, No. A13, pp. 7963–8006, 1980.
- [17] G. K. Vallis. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, first edition, 2006.
- [18] 宇宙航空研究開発機構 (JAXA). 探査機を知る — ミッション — 金星探査機「あかつき」. <https://akatsuki.isas.jaxa.jp/mission/spacecraft/>, n.d. Accessed: 2026-01-30.