**物理数学演習 I** (倉本)　No.1　1999 年 4 月 12 日

**1. (複素数の性質)** 任意の 2 つの実数 $x$，$y$ と虚数単位 $i$ によって，複素数 $z$ が $z = x + iy$ と定義される．$x$，$y$ をそれぞれ $z$ の実部 (real part)，虚部 (imaginary part) と呼び，$\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$ と記す．2 つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$ の和 $(z_1 + z_2)$・差 $(z_1 - z_2)$・積 $(z_1 z_2)$ は，それぞれ次のように定義される．

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2), z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) 商 $z_3 = z_1/z_2$ は $z_2 z_3 = z_1$ の関係を持つ数として定義される．$\mathrm{Re}(z_3)$，$\mathrm{Im}(z_3)$ を $x_1$，$y_1$，$x_2$，$y_2$ を用いて表せ．

(2) $z$ の絶対値 $|z|$ は $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ で定義される．このとき任意の 2 つの複素数 $z_1, z_2$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(3) 一般に $n$ 個の複素数 $z_1$，$\cdots$，$z_n$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n| \tag{1}$$

**2. (複素数の指数関数)** 複素数 $z$ をべきに持つ指数関数 $e^z$ は次の無限級数で定義される．ただし $0! = 1$ とする．

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \tag{2}$$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) この級数は任意の $z$ に対して (絶対) 収束することを証明せよ．(ヒント：式 (1) を利用する)

(2) 2 つの複素数 $z_1$，$z_2$ に対して，$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ が成り立つことを証明せよ．

(3) $z = x + iy$ ($x$，$y$ は実数) に対して $z_1 = x$，$z_2 = iy$ と置くことにより，$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ と書くことができる．このとき $e^{iy}$ は三角関数を用いて

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{3}$$

と書けることを証明せよ (オイラーの公式)．

**3. (複素関数の極表示)** オイラーの公式 (3) により，任意の複素数 $z = x + iy$ ($x$，$y$ は実数) は，以下のように「極形式」で表すことができる．

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$，$\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ である．実数 $\theta$ を $|z|$ の偏角と呼ぶ．これは $(x, y)$ を座標にもつ $xy$ 平面に表すと幾何学的に理解できる．この平面を複素平面と呼び，$x$ 軸を実軸，$y$ 軸を虚軸と呼ぶ．

(1) 次の複素数を $a + ib$ ($a$，$b$ は実数) の形で表せ．

1) $e^{-\pi i}$　　2) $e^{\frac{\pi}{4}i}$　　3) $e^{\frac{5\pi}{6}i}$

(2) $z^3 = 1$ の根を全て求め，複素平面上に図示せよ．

(3) $z^n = 1$ の根は複素平面上でどのような幾何学的位置にあるか．

**4. (複素関数の微分)**

(1) 複素数 $z$ の関数 $f(z) = z^n$ を考える．$h$ を偏角一定の複素数とする時

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{4}$$

は $h$ の偏角の値によらず，$nz^{n-1}$ に収束することを示せ．

一般に $z$ の関数 $f(z)$ について式 (4) の極限が一意に定まる時, $f(z)$ は微分可能といい，そのときの極限を導関数と呼ぶ．導関数は実関数の場合と同様に $f'$ や $\dfrac{df}{dz}$ 等と記される．

(2) 指数関数の定義式 (2) を項別に微分することによって, 1) $\dfrac{de^z}{dz}$，2) $\dfrac{de^{cz}}{dz}$ をそれぞれ求めよ．但し $c$ は複素定数 ($c \neq 0$) とする．

**5. (微分方程式との対応)**

(1) 2 つの $\theta$ の関数 $f_1(\theta) = e^{i\theta}$, $f_2(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ はともに次の微分方程式の解であることを示せ．

$$\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} = -f(\theta)$$

(2) $f_1(0) = f_2(0) = 1$, $f_1'(0) = f_2'(0) = i$ を示せ．

微分方程式 (1) の解は，$f(0), f'(0)$ を与えると一意に決まる．このことからも，オイラーの公式 (3) が成り立つことがわかる．

**6. (座標系の回転)**　3次元直交座標空間における回転について考える．ここで回転とは次の2つのいずれかの操作を意味する：(i) 座標軸は固定し, 原点のまわりに空間内の点を回転させる，または，(ii) 点は固定し，座標軸を原点の周りに回転させる．ここでは (ii) の座標軸の回転を考える．

回転前の3つの直交座標軸 $1$，$2$，$3$ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$，回転後 (すべてダッシュ$'$をつけて表す) の直交座標軸 $1'$，$2'$，$3'$ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}'_1$，$\mathbf{e}'_2$，$\mathbf{e}'_3$ で表す．

位置ベクトル $\mathbf{r}$ がそれぞれの座標系において，

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + x'_3\mathbf{e}'_3$$

と書けるものとする．つまり，$(x_1, x_2, x_3)$ が $\mathbf{r}$ の旧座標，$(x'_1, x'_2, x'_3)$ が新座標である．

(1) このとき旧座標から新座標への変換は行列を用いて以下の様に書けることを示せ．この行列は回転行列と呼ばれる．

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ 但し } a_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$$

ここで $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$ はベクトル $\mathbf{e}'_i$ と $\mathbf{e}_j$ の内積を表す.

(2) 次の各軸の周りに右ねじの方向へ角度 $\theta$ 回転するときの回転行列の表式をそれぞれ求めよ．

1) 第3軸　2) 第2軸　3) 第1軸

(3) 地球の中心を原点とする直交座標系を考える．第3軸が北極を通り, 第1軸が北緯0度，東経0度を通るものとする．このとき第3軸を北極から北緯 $\beta$ 度，東経 $\alpha$ 度に経線に沿って回転させる．このときの回転行列の表式を求めよ．(ヒント：(2) で求めた基本的な回転行列の積として表すことができる)

**7. (三角関数の展開公式)**

(1) 問題 **6.**(2) の第3軸の周りの回転行列を $R_3(\theta)$ と書くことにする．この軸の周りに2回続けて回転を行う (1回目 $\theta_1$，2回目 $\theta_2$) ことは，回転行列の積 $R_3(\theta_2)R_3(\theta_1)$ で表現される．この積は $R_3(\theta_1 + \theta_2)$ に一致する．この性質を用いて三角関数の展開公式

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2$$
$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

を証明せよ．

(2) オイラーの公式 (3) を用いることにより，三角関数の展開公式を証明せよ．