

1. (座標系の微少回転) 3次元直交座標空間において座標軸を第3軸の周りに微少な角  $\delta\theta$  回転させる座標変換を考える.

- (1) この微少な座標変換をあらわす行列は以下のように書けること示せ. ただし  $I$  は単位行列である.

$$I + \delta\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (2) (1)で求めた行列を  $I + \delta\theta J_3$  と記す. 位置ベクトル  $r$  の変換前の座標を  $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ , 変換後の座標を  $\mathbf{x}' = {}^t(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, x_3 + \delta x_3)$  とする (左肩の  $t$  は転置をとることをあらわす). このとき  $\theta \rightarrow 0$  の極限で,

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\theta} = J_3 \mathbf{x} \quad (1)$$

が成り立つことを示せ. ただし  $\frac{d\mathbf{x}}{d\theta}$  は極限  $\lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{\delta\theta}$  で定義する.

- (3) 一般に行列  $A$  の指数関数は

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots \quad (2)$$

で定義される. これを用いると微分方程式 (1) の解は

$$\mathbf{x} = e^{J_3\theta} \mathbf{x}_0$$

と表すことができることを示せ. ここで  $\mathbf{x}_0$  は任意の定ベクトルである. また,  $e^{J_3\theta}$  は, 第3軸の周りに有限な角  $\theta$  回転させる座標変換を表す行列に一致することを示せ.

2. (回転する座標系での速度と加速度) 静止した3次元直交座標系  $S$  に対し, 第3軸の周りに一定の角速度  $\Omega$  で回転している座標系  $S'$  がある. 位置ベクトル  $r$  の  $S$  での座標を  $\mathbf{x}_S$ ,  $S'$  での座標を  $\mathbf{x}_{S'}$  と記す. 時間  $t = 0$  で両座標系が重なるものとする,

$$\mathbf{x}_{S'} = e^{J_3\Omega t} \mathbf{x}_S$$

あるいは

$$\mathbf{x}_S = e^{-J_3\Omega t} \mathbf{x}_{S'} \quad (3)$$

と書くことができる．ただし

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．このとき以下の問いに答えよ．

- (1) 式(3)の両辺を時間  $t$  で1階微分することにより，

$$e^{J_3\Omega t} \frac{d\mathbf{x}_S}{dt} = \frac{d\mathbf{x}_{S'}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_{S'}$$

を示せ．ただし  $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$  である．

- (2) さらにもう1階微分することにより

$$e^{J_3\Omega t} \frac{d^2\mathbf{x}_S}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{x}_{S'}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{x}_{S'}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_{S'}$$

を示せ．

この式の左辺は静止系の加速度を単に角度  $\theta = \Omega t$  回転した座標系へ射影したものである．右辺はこれを回転系の座標で表したものに当たる．第1項はみかけの加速度，第2項がコリオリ力，第3項が遠心力をあらわす．

3. (置換) 1 から  $n$  までの自然数を元とする集合における1対1変換  $\sigma$  を考える． $\sigma(1) = i_1, \sigma(2) = i_2, \dots, \sigma(n) = i_n$  である時 ( $i_1, i_2, \dots, i_n$  はあい異なる  $n$  以下の自然数) ，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

と記す．このとき以下の問いに答えよ．

- (1) このような変換は  $n!$  とおりあることを示せ．
- (2) 任意の置換は何個かの互換(2つの数の入れ替え)の積として表される．実際隣同志の入れ替えを何度もくり返せば， $n$  個の数字を任意の順序に並べることができる．ただし，一つの置換を互換の積として表す方法は一通りではない．だが，互換の個数が偶数か奇数かは初めに与えられた置換によって決まり，その表し方にはよらないという性質がある．これを証明せよ．(ヒント  $n$  変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の差積  $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$  を導入する)

(3) 変換  $\sigma$  は偶数個の互換の積で表されるとき偶置換，奇数個の互換の積で表される時奇置換という．置換  $\sigma$  の符号  $\text{sgn } \sigma$  は  $\sigma$  が偶置換の時  $+1$ ，奇置換の時  $-1$  と定義する．このとき以下の問いに答えよ．

(i)  $n = 3$  のときの置換をすべて列挙し，それぞれの符号を求めよ．

(ii)  $n = n$  の置換  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$  の符号を求めよ．

4. (行列式の多重線形性と交代性)  $n \times n$  行列  $A = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n)$  の行列式  $\det A$  は以下のように定義される．

$$\det A = \sum_{\forall \sigma} \text{sgn } \sigma a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

このとき行列式には以下の性質が成り立つことを証明せよ．

(1)  $k$  を定数とする時，

$$\det(\mathbf{a}_1 \cdots k\mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n) = k \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n)$$

(2)

$$\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i + \mathbf{a}'_i \cdots \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}'_i \cdots \mathbf{a}_n)$$

(3)

$$\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n)$$

(4)  $B$  をもう一つの  $n \times n$  行列とする時，

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

5. (行列式の意味)  $n \times n$  行列  $A$  がゼロベクトルでない列ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$  を用いて  $A = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n)$  と書かれているとする．このとき，

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n \text{ が線形従属} \iff \det A = 0$$

を証明せよ．

6. (余因子展開)  $n \times n$  行列  $A = (a_{ij})$  の第  $i$  行，第  $j$  列を除いてできる  $(n-1) \times (n-1)$  行列の行列式を， $A$  の第  $(i, j)$  小行列式という．これに符号  $(-1)^{i+j}$  をかけたものを  $A$  の第  $(i, j)$  余因子といい， $\tilde{a}_{ij}$  と記す．このとき以下の問いに答えよ．

(1)

$$\det A = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

$$\det A = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

を証明せよ．式(4), (5)をそれぞれ第  $j$  列, 第  $i$  行に対する余因子展開という．

(2)

$$a_{1j}\tilde{a}_{1l} + a_{2j}\tilde{a}_{2l} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nl} = \delta_{jl} \det A \quad (j, l = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

$$a_{i1}\tilde{a}_{k1} + a_{i2}\tilde{a}_{k2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{kn} = \delta_{ik} \det A \quad (k, i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

を証明せよ．ここで  $\delta_{ij}$  はクロネッカー  $\delta$  である．

$\tilde{a}_{ji}$  を  $(i, j)$  成分とする (順序に注意)  $n \times n$  行列  $\tilde{A}$  を  $A$  の余因子行列という．式(6), (7)から

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = (\det A)I$$

が示された．ここから  $\det A \neq 0$  のとき  $\tilde{A}/\det A$  が  $A$  の逆行列であることがわかる．

7. (特性多項式)  $n \times n$  行列  $A = (a_{ij})$  に対して以下のように定義される  $x$  の  $n$  次多項式

$$\det(xI - A) = \det \begin{pmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{pmatrix}$$

を  $A$  の特性多項式という． $\det(xI - A) = 0$  の解を  $A$  の特性根 (または固有値) という．特性根の一つを  $\lambda$  とするとき,

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

を満たすゼロでないベクトル  $\mathbf{u}$  を固有ベクトルという．このとき以下の性質が成り立つことを証明せよ．

(1) 行列  $A$  が三角行列ならば, その対角成分は固有値に等しい．

(2) 任意の  $n \times n$  正則行列  $P$  に対して  $\det(xI - P^{-1}AP) = \det(xI - A)$  が成り立つ．

(3) 任意の行列  $A$  は適当な  $n \times n$  正則行列  $P$  を選ぶと  $P^{-1}AP$  が上三角行列となるようにできる．

(4)  $A$  の特性多項式が

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$$

ならば  $A^p$  ( $p$  は自然数) の特性多項式は

$$(x - \lambda_1^p)(x - \lambda_2^p) \cdots (x - \lambda_n^p)$$

である．