物理数学演習 I (倉本)　　No.4　　1999 年 5 月 10 日

これから数週はベクトル解析の学習をおこなう．今後特に断らない限り，

- 3 次元直交座標系を考える
- x, y, z 成分を $1, 2, 3$ 成分あるいは x_1, x_2, x_3 成分ともあらわす
- $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は 3 次元直交座標系の基本ベクトルをあらわす (問題 2)．これを $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ あるいは $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ともあらわす.
- 和の規約 (問題 1) を用いる

1. (クロネッカーの記号，レビ・チビタの記号，和の規約) 添字 i, j, k は $1, 2, 3$ いずれかの番号をとるのもとする．クロネッカーの記号 δ_{ij} とレビ・チビタの記号 ε_{ijk} は以下のように定義される．

$i \neq j$ のとき	$\delta_{ij} = 0$
$i = j$ のとき	$\delta_{ij} = 1$
ijk が 123 の偶置換とき	$\varepsilon_{ijk} = 1$
ijk が 123 の奇置換とき	$\varepsilon_{ijk} = -1$
2 つ以上の添字が同じ番号のとき	$\varepsilon_{ijk} = 0$

和の規約とは，項の中に同じ添字記号があらわれたら，その取りうるすべての番号について自動的に和をとることを言う．例えば 2 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の内積は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

が定義だが，和の規約を用いると簡潔に

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i b_i$$

とあらわされる．

このとき以下の等式が成り立つことを示せ．

(1) $\delta_{ii} = 3$　(2) $\delta_{ij}\delta_{ik} = \delta_{jk}$　(3) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \delta_{ij} a_i b_j$　(4) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0$　(5) $\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$

(6) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$　(7) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$

おいおい分かるように，これらの記号と和の規約を用いると，さまざまな式変型を容易に行うことができる．

2. (外積) 3次元直交座標系の基本ベクトルを $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ とする．$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x,y,z(または 1,2,3) 軸の正の向きを持ち，大きさは 1 である．2つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は 3×3 行列の行列式を用いて以下のように定義される

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の成分を ε_{ijk} と $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の成分とで表せ．

(2) ε_{ijk} を用いて，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$ を示せ．

(3) $\boldsymbol{bac}$ 公式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ を証明せよ．

3. (勾配) x,y,z のスカラー関数 $f=f(x,y,z)$ がある時，点 P(x,y,z) における f の勾配ベクトル grad f は

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

で定義される．grad はグラジェントやグラッドと発音する．ハミルトンの演算子

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

を用いると

$$\text{grad } f = \nabla f$$

とも表される．∇ はナブラと呼ぶ．このとき以下の問いに答えよ．

(1) grad $f=\boldsymbol{e}_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ とも表せることを示せ．

(2) g をもう一つのスカラー関数とする時，以下の恒等式が成り立つことを示せ．

(i) $\nabla(af+bg)=a\nabla f+b\nabla g$ (a,b 定数)

(ii) $\nabla(fg)=g\nabla f+f\nabla g$

(iii) $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$

(iv) $\nabla(f(g))=\dfrac{\partial f}{\partial g}\nabla g$

4. (勾配の具体例) 以下の 2 次元直交空間 (x, y) におけるスカラー関数 $f = f(x, y)$ について，i) grad $f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$ を求め，ii) 幾つかの等高線 $f =$ 一定 を図示し，等高線上の幾つかの点において grad f を矢印で表せ.

(1) $f = 2x - 3y$ (2) $f = y/x$ (3) $f = xy$ (4) $f = 4x^2 + 9y^2$

5. (r の勾配) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{j}$ について，$r = |\boldsymbol{r}|$ と置く．このとき次の等式を証明せよ.

(1) $\nabla r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ (2) $\nabla f(r) = f'\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ (3) $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ (4) $\nabla \log r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}$

6. (保存力) 力 $\boldsymbol{F}$ があるスカラー関数 U を用いて $\boldsymbol{F} = -$grad U と書けるとき，$\boldsymbol{F}$ は保存力と呼ばれる．質点 m が保存力 $\boldsymbol{F}$ のもとで運動するとき，運動エネルギーと U の和は一定に保たれることを示せ.

7. (方向微分) $\boldsymbol{u} = (l, m, n)$ を単位ベクトルとする．このとき極限値

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(x + l\Delta s, y + m\Delta s, z + n\Delta s) - f(x, y, z)}{\Delta s}$$

を f の u 方向の方向微分係数といい，$\dfrac{\partial f}{\partial u}$ と記す．このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \boldsymbol{u} \cdot$ grad f を証明せよ.

(2) $\left|\dfrac{\partial f}{\partial u}\right| \leq |$grad $f|$ を証明せよ．また等号が成り立つのはどのような時か示せ.

8. (発散) 各成分が座標の関数となっているベクトル

$$\boldsymbol{A} = a_1(x,y,z)\boldsymbol{i} + a_2(x,y,z)\boldsymbol{j} + a_3(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

を考える (このとき $\boldsymbol{A}$ をベクトル場と呼ぶ). $\boldsymbol{A}$ の発散 div $\boldsymbol{A}$ を

$$\begin{aligned}\text{div}\,\boldsymbol{A} &= \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\end{aligned}$$

で定義する．div はダイバージェンスと発音する．このとき以下の問いに答えよ.

(1) ハミルトンの演算子を用いると div $\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$ ともあらわせることを示せ.

(2) $\varphi = \varphi(x,y,z)$ をスカラー関数とする時，等式 div $(\varphi \boldsymbol{A}) = (\text{grad}\,\varphi) \cdot \boldsymbol{A} + \varphi \text{div}\,\boldsymbol{A}$ を証明せよ.

(3) 等式 div $(\text{grad}\,\varphi) = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ を証明せよ.

div $(\text{grad}\,\varphi)$ は $\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \triangle \varphi$ といろいろな書き方をする．記号 $\triangle$ はラプラシアンと呼ぶ.

9. (発散の解釈) 流体が点 P(x,y,z) において速度 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ を持つものとする．P を中心とし各稜の長さが $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ の小さな直方体を考える．ここで各稜はそれぞれ x,y,z 軸に平行である．この直方体から単位時間に流出する流体の総体積は近似的に

$$(\text{div}\,\boldsymbol{v})\Delta x \Delta y \Delta z$$

で与えられることを示せ.

10. (回転) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転 rot $\boldsymbol{A}$ を

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

で定義する．rot はローテーションまたはロートと発音する．これを curl (カール) と記す場合もある．以下の問いに答えよ．

(1) ハミルトンの演算子を用いると rot $\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ とあらわせることを示せ．

(2) rot $\boldsymbol{A}$ の成分を ε_{ijk} を用いた記法で表せ．

(3) f をスカラー関数とする時，rot $(\mathrm{grad}\ f) = 0$ を証明せよ．

(4) div $(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}) = 0$ を証明せよ．

(5) rot $(f\boldsymbol{A}) = (\mathrm{grad}\ f) \times \boldsymbol{A} + f\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}$ を示せ．

11. (rot rot $\boldsymbol{A}$)

(1) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \triangle \boldsymbol{A}$ を証明せよ．

(2) $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}$ が x, y, z, t のベクトル関数で

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\ \boldsymbol{E} = 0 & &\mathrm{div}\ \boldsymbol{H} = 0 \\ &\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} & &\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

を満たすならば，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ は以下の波動方程式を満たすことを示せ．

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \boldsymbol{E} \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \boldsymbol{H}$$

12. (回転の意味) 原点を通る固定軸のまわりに剛体が回転運動をしている．

(1) 角速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}$，各位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における速度を $\boldsymbol{v}$ とするとき，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ を示せ．

(2) $\boldsymbol{\Omega} = \dfrac{1}{2}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}$ を示せ．