物理数学演習 I (倉本)　　No.5　　1999 年 5 月 17 日

1. (曲線のパラメーター表示) 点 P の座標が変数 t の連続関数になっているとする．t の変化とともに P は空間曲線を描く．P の座標ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とすれば

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

である．これを曲線のパラメーター t による表示と呼ぶ．t が $a \leq t \leq b$ の範囲を変化する時，$t = a$ に対応する P の座標を始点，$t = b$ に対応する座標を終点と呼ぶ．

曲線上の各点の接線ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ は

$$\boldsymbol{r}'(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

で与えられる．この式は以下のようにも書ける

$$d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k} = (\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k})dt$$

$d\boldsymbol{r}$ は線素ベクトルとも呼ばれる．

t が微少量変化する時の線素 (点 P の移動距離)ds は

$$ds = \sqrt{d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt = |\boldsymbol{r}'(t)|dt$$

で与えられる．これを始点から終点まで積分すると曲線全体の長さ s が得られる．

$$s = \int_0^s ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

以下具体例を考えよう．曲線 $\boldsymbol{r}(t) = p\cos t\,\boldsymbol{i} + p\sin t\,\boldsymbol{j} + qt\,\boldsymbol{k}$ (p, q は実定数) について，以下の問いに答えよ

(1) この曲線の概形を図示せよ

(2) 点 $(p, 0, 0)$ における接線ベクトルと，接線の方程式を求めよ．

(3) この曲線上の任意の点における接線は z 軸と定角をなすことを示せ．

(4) $0 \leq t \leq 2\pi$ のとき，曲線の長さを求めよ．

2. (線積分) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (a_1(\boldsymbol{r}), a_2(\boldsymbol{r}), a_3(\boldsymbol{r}))$ の曲線 C に沿った線積分とは，$\boldsymbol{A}$ と線素ベクトル $d\boldsymbol{r}$ の内積を曲線全体に渡って足しあげたものとして定義される．則ち

$$\begin{aligned} \text{曲線 C 上のベクトル場の線積分} &= \int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_C a_1(\boldsymbol{r})dx + \int_C a_2(\boldsymbol{r})dy + \int_C a_3(\boldsymbol{r})dz \end{aligned}$$

である．このとき C は積分路ともよばれる．C が変数 t でパラメータ表示されているとき，$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t)dt$ なので，

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot \boldsymbol{r}'(t)dt$$

が成り立つ．

このとき以下の問いに答えよ

(1) $\boldsymbol{A} = \dfrac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}$ のとき，上式は曲線 C の長さを与えることを示せ．

(2) 2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (x-y, y-x)$ の点 (0,0) から点 (1,1) までの次の曲線 C_1, C_2, C_3 に沿った線積分をそれぞれ求めよ．

$$C_1 : y = x \qquad C_2 : y = x^2 \qquad C_3 : y^3 = x$$

(3) 2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (y, x)$ の点 (0,0) から点 (1,1) までの C_1, C_2, C_3 に沿った線積分をそれぞれ求めよ．

3. (勾配の線積分) スカラー場 φ の勾配 grad φ を点 A から B にいたる曲線 C に沿って線積分する．このとき C の取り方によらず

$$\int_C \mathrm{grad}\,\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$$

であることを示せ．

4. (保存ベクトル場) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ がある．任意の 2 点を結ぶ曲線 C に沿った $\boldsymbol{A}$ の線積分が始点と終点の座標にのみ依存し，C の取りかたによらないとき，$\boldsymbol{A}$ はあるスカラー関数の勾配になっていることを示せ．スカラー関数の勾配であらわされるベクトル場は保存ベクトル場と呼ばれる．

5. (曲面のパラメーター表示) 点 P の座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ が 2 変数 u, v の連続関数である時, u, v の変化とともに P は曲面を描く．これを曲面のパラメーター u, v による表示と言う．これを成分で書き下すと

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{i} + y(u, v)\boldsymbol{j} + z(u, v)\boldsymbol{k}$$

となる．

このとき v を固定して u を動かすと $\boldsymbol{r}(u, v)$ は 1 つの曲線を描く．これを u-曲線という．同様に u を固定して v を動かして得られる曲線を v-曲線という．u, v-曲線の接線ベクトル $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ はそれぞれ $\boldsymbol{r}_u = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u}, \boldsymbol{r}_v = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial v}$ で与えられる．このとき以下の問いに答えよ．

(1) S 上の各点において S に垂直なベクトルを法線ベクトルと呼ぶ．$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ が点 P(u, v) における法線ベクトルであることを示せ．

(2) 近接した 2 本の u-曲線と接近した 2 本の v-曲線，計 4 本の曲線で囲まれた四辺形状の部分を考える．P_0=P(u, v)，P_1=P$(u, v + \Delta v)$，P_3=P$(u + \Delta u, v)$ とすれば，この部分はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}$ の作る平行四辺形で近似される．この部分の面積を ΔS とおくと，

$$\Delta S \approx |(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\Delta u\, \Delta v|$$

と近似できることを示せ．

ここから定義される

$d\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v) du\, dv$ をベクトル面積素

その大きさ $dS = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| du\, dv$ を単に面積素

という。面積素を足しあげることにより曲面 S の面積が求められる．つまり

$$\int_S dS = \int_S |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| du\, dv$$

である．

5. (球面のパラメーター表示)

(1) 原点を中心とし，半径 ρ の球面は

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\theta, \phi) = \rho \sin\theta \cos\phi\, \boldsymbol{i} + \rho \sin\theta \sin\phi\, \boldsymbol{j} + \rho \cos\theta\, \boldsymbol{k}$$

とパラメータ表示できることを示せ．

(2) ベクトル面積素と面積素を求めよ．

(3) 球面の表面積は $4\pi\rho^2$ で与えられることを示せ．

7. (面積分) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の曲面 S 上における面積分は，$\boldsymbol{A}$ と面積素 $d\boldsymbol{S}$ の内積を面全体で足しあげたものとして定義される．$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,dS$ ($\boldsymbol{n} = (l, m, n)$ は単位法線ベクトル) を用いると，

$$\begin{aligned}\text{曲面 } S \text{ 上のベクトル場 } \boldsymbol{A} \text{ の面積分} &= \int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \\ &= \int_S (a_1 l + a_2 m + a_3 n)\,dS\end{aligned}$$

とあらわされる．このとき S を積分領域ともよぶ．S がパラメータ u, v によって表示されている時には,

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u,v))\cdot(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\,du\,dv$$

とあらわすことができる．
以下の問いに答えよ．

(1) f, g を u, v の関数とする．このときヤコビ行列式 (ヤコビアン) は以下のように定義される．

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}$$

これを用いると,

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

と書けることを示せ．

(2) 曲面 S が $z = f(x,y)$ の形で与えられている場合がある．パラメーターとして x, y を採用すると S は以下のように表示できる．

$$\boldsymbol{r}(x,y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + f(x,y)\boldsymbol{k}$$

このとき

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_D \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}|}dx\,dy$$

をしめせ．ここで積分領域 D は S の xy 平面への正射影である．