物理数学演習 I (倉本)　　中間試験　　1999 年 6 月 14 日

解答上の注意

1) 答案用紙 3 枚，計算用紙 1 枚

2) 答案用紙は裏面も使って良い．そのときは表に「裏へ」と明記すること．

3) 答案の並びは，問題番号の並びと違っていてもよい．ただし問題番号は明記すること．

4) 持ち込み不可．

1. 以下の問いに答えよ．

(1) 任意の 2 つの複素数 z_1, z_2 に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(2) 次の複素数を $a + ib$ (a，b は実数) の形で表し，複素平面上に図示せよ．

i) $e^{-\pi i}$　　ii) $e^{\frac{\pi}{4}i}$　　iii) $e^{\frac{5\pi}{6}i}$　　iv) i^i

(3) $z^3 = 1$ の根を全て求め，複素平面上に図示せよ．

(4) $z^n = 1$ の根は複素平面上でどのような幾何学的位置にあるか．

2. 行列 $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ を (1) 対角化し，(2) A^n (n は自然数)，(3) e^A，(4) $\mathrm{Tr}(e^A)$ を求めよ．

3. 原点のまわりの座標軸の回転について考える．回転前の3つの直交座標軸1，2，3方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，回転後 (すべてダッシュ′をつけて表す) の直交座標軸 $1'$，$2'$，$3'$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1$，$\boldsymbol{e}'_2$，$\boldsymbol{e}'_3$ で表す．
　位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ がそれぞれの座標系において，

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = x'_1\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\boldsymbol{e}'_2 + x'_3\boldsymbol{e}'_3$$

と書けるものとする．つまり，(x_1, x_2, x_3) が $\boldsymbol{r}$ の旧座標，(x'_1, x'_2, x'_3) が新座標である．

(1) このとき旧座標から新座標への変換は行列を用いて以下の様に書けることを示せ．この行列は回転行列と呼ばれる．

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{但し} \ a_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

ここで $\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ はベクトル $\boldsymbol{e}'_i$ と $\boldsymbol{e}_j$ の内積を表す．

(2) 第3軸の周りに右ねじの方向へ角度 θ 回転するときの回転行列 $R_3(\theta)$ の表式を求めよ．

(3) 三角関数の展開公式

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

を証明せよ．

4. $\boldsymbol{A}$ をベクトル場とする．以下の問いに答えよ．

(1) rot $\boldsymbol{A}$ の i 成分を ε_{ijk} を用いた記法で表せ．

(2) rot (rot $\boldsymbol{A}$) $=$ grad (div $\boldsymbol{A}$) $- \triangle\boldsymbol{A}$ を証明せよ．

(3) $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}$ が x, y, z, t のベクトル関数で

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0 && \mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0 \\ &\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} && \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

を満たすならば，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ は以下の波動方程式を満たすことを示せ．

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = c^2\triangle\boldsymbol{E} \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = c^2\triangle\boldsymbol{H}$$

5. 以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲面 S がある．$\boldsymbol{r}$ を位置ベクトル，$r = |\boldsymbol{r}|$ とする時,

$$\int_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3} dS = \begin{cases} 0 & S\text{が原点を含まない時} \\ 2\pi & \text{原点が } S \text{ 上にある時} \\ 4\pi & \text{原点が } S \text{ 内にある時} \end{cases}$$

を証明せよ．

(2) n 個の質点 $1, 2, \cdots, n$ が位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ に存在する．各質点は相異なる質量 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ をもつ．このとき位置 $\boldsymbol{r}$ にある単位質量に作用する万有引力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = G\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}|^3}$$

で与えられる．S を閉曲面とする時

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = -4\pi G(S\text{ 中の質量の総和})$$

となることを証明せよ．

(3) 質量が空間内に連続的に分布している場合を考える．このとき各位置での密度を $\rho(\boldsymbol{r})$ とすると，重力ポテンシャル Φ は次の式に従うことを示せ．

$$\triangle\Phi = 4\pi G\rho$$

6. 問題を作りこれに解答せよ．問題文と解答をはっきり区別して記述すること．