

1. (導関数の積分表示)  $f(z)$  を閉曲線  $C$  上とその内部で正則な関数とする時, コーシーの積分公式が成り立つ.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

ここで  $a$  は  $C$  内部の任意の点である. 以下の問いに答えよ.

(1)  $f'(z)$  を  $f(z)$  の導関数とする. このとき

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

を証明せよ.

(2)  $f^{(n)}(z)$  を  $f(z)$  の  $n$  階導関数とする. このとき

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

を証明せよ.

(3)  $C$  を点  $z = a$  を中心とする半径  $R$  の円とする. もし  $|f(z)| \leq M$  (ここで  $M$  はある正の実数) ならば,

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{R^n}$$

が成り立つことを証明せよ. この不等式をコーシーの不等式という.

## 2. (リュービュルの定理)

(1) コーシーの不等式を用いることにより, もし関数  $f(z)$  が全ての  $z$  に対して正則かつ有界 ( $|f(z)| < \infty$ ) ならば  $f$  は定数であることを証明せよ. これをリュービュル (Liouville) の定理という.

(2) 複素数  $a_0, \dots, a_n$  を係数に持つ代数方程式

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

は必ず根を持つことを証明せよ. (ヒント:  $f(z) = 1/(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)$  に対してリュービュルの定理を使う)

3. (テイラー展開) もし  $f(z)$  が  $z = a$  を中心とする半径  $R$  の円周  $C$  上およびその内部で正則ならば,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - a)^n \quad (1)$$

$$A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

とあらわすことができる. ここで  $z$  は  $C$  内部の任意の点である. これをテイラー (Taylor) の定理と言い, 式 (1) をテイラー級数という. 以下でこの定理を証明しよう.

(1)  $z = \xi$  を  $C$  上の点とする. このとき

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - a}{\xi - a} \right)^n$$

を示せ (ヒント:  $|r| < 1$  のとき  $1/(1-r) = 1 + r + r^2 + \dots$  を思い出す). 右辺の級数が絶対収束することを確認せよ.

(2) コーシーの積分公式を以下の形に書く.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

ここに (1) で証明した式を代入することにより

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

を示せ.

(3) 導関数の積分表示を用い, テイラーの定理が成り立つことを示せ.

4. (ローラン展開) 関数  $f(z)$  が  $z = a$  に特異点を持つがその近傍の点では正則な場合を考える. このとき  $z = a$  の周りでテイラー級数には展開できない. しかしこれを拡張したローラン (Laurant) 級数に展開することができる (次式).

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - a)^n \quad (2)$$

テイラー級数との違いはベキが負の項も含む点である. 以下では  $A_n$  の形を決定しよう.

- (1)  $f(z)$  は円環領域  $R_1 \leq |z - a| \leq R_2$  において正則とする ( $R_{1,2} \in \mathbf{R}, 0 < R_1 < R_2$ ).  
 $C_1 = \{z \mid |z - a| = R_1\}, C_2 = \{z \mid |z - a| = R_2\}$  とするとき

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta$$

を示せ .

- (2) 収束性に注意して

$$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{z - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\xi - a}{z - a} \right)^n$$

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{\eta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - a}{\eta - a} \right)^n$$

を示せ .

- (3)  $n$  の正負に関わらず

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz$$

が成り立つことを示せ . ここで  $C$  は  $C_1$  と  $C_2$  との間に任意に描いた同心円である .

式 (2) を  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} A_n (z - a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - a)^n$  と書いたとき , 負べき項からなる右辺の第 1 の級数を主要部 , 第 2 の級数を解析部という .  $A_{-1}$  は特別な性格を持つことから留数と呼ばれる (問題 6) .  $z = a$  が  $f(z)$  の  $p$  位の極であるとき ,  $n < -p$  の  $A_n$  は全て 0 となり主要部は有限項で表わされる .  $z = a$  が真性特異点のときは , 主要部は無級数となる .

## 5. (関数展開の具体例)

- (1) 次の関数を ,  $z = 0$  と  $z = 2$  の周りでそれぞれローラン級数に展開せよ .

$$f(z) = \frac{1}{z(z - 2)^3}$$

- (2) 次の関数を原点の周りで級数展開せよ .

$$f(z) = \frac{1}{(z + 1)(z - 2)}$$

ここで  $|z| < 1, 1 < |z| < 2, |z| > 2$  の 3 つの領域ごとに展開の形が異なることに注意せよ .

## 6. (留数定理)

- (1)  $f(z)$  が  $z = a$  に  $p$  位の極を持ち,  $z = a$  の周りで以下のようにローラン級数に展開されている.

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} A_n(z-a)^n$$

$f(z)$  を  $z = a$  を内部に含む閉曲線  $C$  に沿って積分する.  $C$  上および内部では  $f(z)$  は  $z = a$  を除き正則とする. このとき

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i A_1$$

を示せ.

- (2)  $C$  上および内部で  $f(z)$  は有限個の極を除いて正則とする. このとき

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_j R_j$$

を示せ. ここで  $R_j$  は  $C$  内部の  $f(z)$  の各々の極の留数である.

## 7. (留数の求め方)

- (1)  $z = a$  が関数  $f(z)$  の  $p$  位の極のとき,

$$(z = a \text{ における留数}) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} (z-a)^p f(z)$$

が成り立つことを示せ.

- (2)  $f(z) = P(z)/Q(z)$  で  $P(z)$  が正則,  $Q(z)$  が  $z = a$  で一位のゼロ点を持つならば

$$(z = a \text{ における留数}) = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

が成り立つことを示せ.

- (3) 次の関数の極における留数を求めよ.

$$\text{i) } \frac{z^3 + 5}{z(z-1)^3} \quad \text{ii) } \frac{\cos z}{z^3} \quad \text{iii) } \frac{1}{\sin z} \quad \text{iv) } \frac{z^2 e^z}{1 + e^{2z}}$$