物理数学演習 I (倉本)　　No.11　　1999 年 7 月 12 日

1. (留数解析：三角関数の定積分) 三角関数で記述される関数 $F(\cos\theta, \sin\theta)$ の以下のような定積分を留数を使った方法で求めてみよう．

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$$

$z = e^{i\theta}$ と変数変換する．

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \qquad d\theta = -iz^{-1}\, dz$$

なので

$$I = \oint_C G(z)\, dz = 2\pi i \times (G \text{ の } C \text{ 内の留数の和})$$

となる．ここで積分路 C は複素平面上の単位円 ($|z| = 1$)．$G(z)$ は $F(z)$ を用いて以下のように与えられる．

$$G(z) = -iz^{-1} F(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i})$$

以下の定積分を留数を用いた方法で計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta} d\theta \quad (0 \leq a \leq b)$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos\theta} d\theta \quad (0 \leq a \leq 1)$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a + b\cos\theta} d\theta \quad (0 \leq b \leq a)$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos k\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta \quad (|a| \neq 0, k : \text{自然数})$

2. (留数解析：実軸上の定積分) $f(z)$ が次の性質を持つとする．

- $f(z)$ は複素平面の上半面 (Im$(z) > 0$) で有限個の極を除いて正則．ただし実軸上には極はない．
- $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} z f(z) = 0$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) 以下の公式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \times (\text{上半面における留数の和})$$

(2) 次の定積分を求めよ．$a \in \boldsymbol{R}$ とする．

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$　　(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + a^4} dx$　　(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + a^4} dx$

3. (留数解析：実軸上の積分 2) $f(z)$ が次の性質を持つとする．

- $f(z)$ は複素平面の上半面 ($\mathrm{Im}(z) \geq 0$) で有限個の極を除いて正則．ただし実軸上には極はない．
- $\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = 0$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) 図のように原点を中心とする半径 R の半円を Γ とする (R : 始点，$-R$: 終点)．$m > 0$ のとき

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma} e^{imz} f(z) dz = 0$$

を示せ (これをジョルダン (Jordan) の補助定理という)．

(2) 次の定積分を求めよ．ただし $a > 0, m > 0$ とする．

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + a^2} dx$　　(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx$

4. (留数解析：積分の主値) 関数 $f(z)$ が実軸上 ($z = z_0$) に極を 1 つ持つ場合にどのように定積分を行うか考えよう．$f(z)$ は $z = z_0$ 以外の点では有限個の極を除いて正則とする．このとき積分の主値 $P \displaystyle\int_{-R}^{R} f(x) dx$ を以下のように定義する．

$$P \int_{-R}^{R} f(x) dx \equiv \int_{-R}^{z_0 - \epsilon} f(x) dx + \int_{z_0 + \epsilon}^{R} f(x) dx \ (\epsilon \to 0)$$

ここで $R, \epsilon > 0$ である．図のような積分路を考えよう．Γ を R を始点，$-R$ を終点とする半球弧，γ を極 $z = z_0$ を中心とする半径 ϵ の半球弧 (始点 $z_0 - \epsilon$，終点 $z_0 + \epsilon$) とする．このとき

(1) $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz + P\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \times$ (実軸, Γ, γ の囲む領域内の留数の和) を示せ.

(2) $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = -iA_{-1}(z_0)\pi$ を示せ．ここで $A_{-1}(z_0)$ は $z = z_0$ の留数である.

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$ ならば

$$P\int_{-R}^{R} f(x)dx = \pi i A_{-1}(z_0)\pi + 2\pi i \times (\mathrm{Im}\, z > 0 \text{ における留数の和})$$

であることを示せ.

(4) 次の積分を求めよ.

(i) $\displaystyle P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{x-a}dx\ (a \in \boldsymbol{R}, m > 0)$ (ii) $\displaystyle P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx$ (iii) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

5. (留数解析：級数和) 極を無限個持つ関数を十分大きな円周について積分することで，無限級数の値を得ることができる場合がある.

$$\oint_C \frac{\pi\cot\pi z}{(a+z)^2}dz$$

を考えることにより,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2\pi a}$$

を示せ．ここで a は非整数の実数．C は原点を中心とする十分に大きな円周とする.