物理数学 I 演習 (倉本)　　No.1　　2000 年 4 月 17 日

1．(座標系の回転)　3 次元直交座標空間における回転について考える．ここで回転とは次の 2 つのいずれかの操作を意味する：(i) 座標軸は固定し, 原点のまわりに空間内の点を回転させる，または，(ii) 点は固定し，座標軸を原点の周りに回転させる．ここでは (ii) の座標軸の回転を考える．

回転前の 3 つの直交座標軸 1，2，3 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，回転後 (すべてダッシュ$'$ をつけて表す) の直交座標軸 $1'$，$2'$，$3'$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1$，$\boldsymbol{e}'_2$，$\boldsymbol{e}'_3$ で表す.

位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ がそれぞれの座標系において,

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = x'_1\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\boldsymbol{e}'_2 + x'_3\boldsymbol{e}'_3$$

と書けるものとする．つまり，(x_1, x_2, x_3) が $\boldsymbol{r}$ の旧座標，(x'_1, x'_2, x'_3) が新座標である．

(1) このとき旧座標から新座標への変換は行列を用いて以下の様に書けることを示せ．この行列は回転行列と呼ばれる．

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{但し} \ \ a_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

ここで $\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ はベクトル $\boldsymbol{e}'_i$ と $\boldsymbol{e}_j$ の内積を表す.

(2) 次の各軸の周りに右ねじの方向へ角度 θ 回転するときの回転行列の表式をそれぞれ求めよ．

1) 第 3 軸　2) 第 2 軸　3) 第 1 軸

(3) 地球の中心を原点とする直交座標系を考える．第 3 軸が北極を通り，第 1 軸が北緯 0 度，東経 0 度を通るものとする．このとき，第 3 軸を北極から経線に沿って北緯 β 度，東経 α 度に回転させる回転行列の表式を求めよ．(ヒント：(2) で求めた基本的な回転行列の積として表すことができる)

2．(三角関数の展開公式)

(1) 問題 **6.**(2) の第 3 軸の周りの回転行列を $R_3(\theta)$ と書くことにする．この軸の周りに 2 回続けて回転を行う (1 回目 θ_1，2 回目 θ_2) ことは，回転行列の積 $R_3(\theta_2)R_3(\theta_1)$ で表現される．この積は $R_3(\theta_1+\theta_2)$ に一致する．この性質を用いて三角関数の展開公式

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

を証明せよ.

(2) オイラーの公式を用いることにより，三角関数の展開公式を証明せよ．

3. (座標系の微少回転) 3 次元直交座標空間において座標軸を第 3 軸の周りに微少な角 $\delta\theta$ 回転させる座標変換を考える．

(1) この微少な座標変換をあらわす行列は以下のように書けること示せ．ただし I は単位行列である．

$$I + \delta\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) (1) で求めた行列を $I+\delta\theta J_3$ と記す．位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の変換前の座標を $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$，変換後の座標を $\boldsymbol{x}' = {}^t(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, x_3 + \delta x_3)$ とする (左肩の t は転置をとることをあらわす)．このとき $\theta \to 0$ の極限で，

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\theta} = J_3 \boldsymbol{x} \tag{1}$$

が成り立つことを示せ．ただし $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{d\theta}$ は極限 $\displaystyle\lim_{\delta\theta\to 0} \frac{\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}}{\delta\theta}$ で定義する．

(3) 一般に行列 A の指数関数は

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots \tag{2}$$

で定義される． これを用いると微分方程式 (1) の解は

$$\boldsymbol{x} = e^{J_3\theta} \boldsymbol{x}_0$$

と表すことができることを示せ．ここで $\boldsymbol{x}_0$ は任意の定ベクトルである．また，$e^{J_3\theta}$ は，第 3 軸の周りに有限な角 θ 回転させる座標変換を表す行列に一致することを示せ．

4. (回転する座標系での速度と加速度) 静止した 3 次元直交座標系 S に対し，第 3 軸の周りに一定の角速度 Ω で回転している座標系 S' がある．位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の S での座標を $\boldsymbol{x}_S$，S' での座標を $\boldsymbol{x}_{S'}$ と記す．時間 $t = 0$ で両座標系が重なるものとすると，

$$\boldsymbol{x}_{S'} = e^{J_3\Omega t} \boldsymbol{x}_S$$

あるいは

$$\boldsymbol{x}_S = e^{-J_3\Omega t} \boldsymbol{x}_{S'} \tag{3}$$

と書くことができる． ただし

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 式 (3) の両辺を時間 t で 1 階微分することにより，

$$e^{J_3\Omega t}\frac{d\boldsymbol{x}_S}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}_{S'}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x}_{S'}$$

を示せ．ただし $\boldsymbol{\Omega} = {}^t(0,0,\Omega)$ である．

(2) さらにもう 1 階微分することにより

$$e^{J_3\Omega t}\frac{d^2\boldsymbol{x}_S}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{x}_{S'}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\frac{d\boldsymbol{x}_{S'}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x}_{S'}$$

を示せ．

この式の左辺は静止系の加速度を単に角度 $\theta = \Omega t$ 回転した座標系へ射影したものである．右辺はこれを回転系の座標で表したものに当たる．第 1 項はみかけの加速度，第 2 項がコリオリ力，第 3 項が遠心力をあらわす．

5．(置換) 1 から n までの自然数を元とする集合における 1 対 1 変換 σ を考える．$\sigma(1) = i_1, \sigma(2) = i_2, \cdots, \sigma(n) = i_n$ である時 ($i_1, i_2, \cdots, i_n$ はあい異なる n 以下の自然数)，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

と記す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) このような変換は $n!$ とおりあることを示せ．

(2) 任意の置換は何個かの互換 (2 つの数の入れ替え) の積として表される．実際隣同志の入れ替えを何度もくり返せば，n 個の数字を任意の順序に並べることができる．ただし，一つの置換を互換の積として表す方法は一通りではない．だが，互換の個数が偶数か奇数かは初めに与えられた置換によって決まり，その表し方にはよらないという性質がある．これを証明せよ．(ヒント n 変数 $x_1, x_2, \cdots .x_n$ の差積 $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ を導入する)

(3) 変換 σ は偶数個の互換の積で表されるとき偶置換，奇数個の互換の積で表される時奇置換という．置換 σ の符合 $\mathrm{sgn}\ \sigma$ は σ が偶置換の時 $+1$，奇置換の時 -1 と定義する．このとき以下の問いに答えよ．

(i) $n = 3$ のときの置換をすべて列挙し，それぞれの符合を求めよ．

(ii) $n = n$ の置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ の符合を求めよ．

6. (行列式の多重線形性と交代性) $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij}) = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ の行列式 $\det A$ は以下のように定義される．

$$\det A = \sum_{\forall \sigma} \mathrm{sgn}\ \sigma a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

このとき行列式には以下の性質が成り立つことを証明せよ．

(1) k を定数とする時,

$$\det(\boldsymbol{a}_1 \cdots k\boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_n) = k \det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_n)$$

(2)

$$\det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}'_i \cdots \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}'_i \cdots \boldsymbol{a}_n)$$

(3)

$$\det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_n)$$

(4) B をもう一つの $n \times n$ 行列とする時,

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

7. (行列式の意味) $n \times n$ 行列 A がゼロベクトルでない列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を用いて $A = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ と書かれているとする．このとき，

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{が線形従属} \iff \det A = 0$$

を証明せよ．