物理数学演習 I (倉本)　　　No.2　　　2000 年 4 月 24 日

1．(余因子展開)　$n\times n$ 行列 $A=(a_{ij})$ の第 i 行，第 j 列を除いてできる $(n-1)\times(n-1)$ 行列の行列式を，A の第 (i,j) 小行列式という．これに符合 $(-1)^{i+j}$ をかけたものを A の第 (i,j) 余因子といい，$\tilde{a}_{ij}$ と記す．このとき以下の問いに答えよ．

(1)

$$\det A = a_{1j}\tilde{a}_{1j}+a_{2j}\tilde{a}_{2j}+\cdots+a_{nj}\tilde{a}_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

$$\det A = a_{i1}\tilde{a}_{i1}+a_{i2}\tilde{a}_{i2}+\cdots+a_{in}\tilde{a}_{in}\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

を証明せよ．式 (1)，(2) をそれぞれ第 j 列，第 i 行に対する余因子展開という．

(2)

$$a_{1j}\tilde{a}_{1l}+a_{2j}\tilde{a}_{2l}+\cdots+a_{nj}\tilde{a}_{nl}=\delta_{jl}\det A\ (j,l=1,2,\cdots,n) \tag{6}$$

$$a_{i1}\tilde{a}_{k1}+a_{i2}\tilde{a}_{k2}+\cdots+a_{in}\tilde{a}_{kn}=\delta_{ik}\det A\ (k,i=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

を証明せよ．ここで δ_{ij} はクロネッカー δ である．

$\tilde{a}_{ji}$ を (i,j) 成分とする (順序に注意)$n\times n$ 行列 $\tilde{A}$ を A の余因子行列という．式 (6), (7) から

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = (\det A)I$$

が示された．ここから $\det A\neq 0$ のとき $\tilde{A}/\det A$ が A の逆行列であることがわかる．

2．(特性多項式)　$n\times n$ 行列 $A=(a_{ij})$ に対して以下のように定義される x の n 次多項式

$$\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix} x-a_{11} & -a_{22} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn}\end{pmatrix}$$

を A の特性多項式という．$\det(xI-A)=0$ の解を A の特性根 (または固有値) という．特性根の一つを λ とするとき，

$$A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$$

を満たすゼロでないベクトル $\boldsymbol{u}$ を固有ベクトルという．このとき以下の性質が成り立つことを証明せよ．

(1) 行列 A が三角行列ならば，その対角成分は固有値に等しい．

(2) 任意の $n\times n$ 正則行列 P に対して $\det(xI-P^{-1}AP)=\det(xI-A)$ が成り立つ．

(3) 任意の行列 A は適当な $n \times n$ 正則行列 P を選ぶと $P^{-1}AP$ が上三角行列となるようにできる.

(4) A の特性多項式が

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

ならば A^p (p は自然数) の特性多項式は

$$(x-\lambda_1^p)(x-\lambda_2^p)\cdots(x-\lambda_n^p)$$

である.

3. (正規方程式) 2 種類の観測量 x, y があり, y が x の関数としてふるまう場合を考える. 最も簡単な関係として, $y = ax + b$ の線形関係を考える. 一般に誤差を含む n 組みの観測データ $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ から, a と b を推定する問題を考える.

(1) $Q = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - (ax_i + b)\}^2$ を残差平方和という. Q を最小化する条件から a と b を求める方程式を導け. このようにして推定される直線 $y = ax + b$ を回帰直線という.

(2) この問題を観測量 x がベクトル $\boldsymbol{x}$ の場合に一般化する. ここで $\boldsymbol{x}$ は p 個の成分からなる. このとき y と $\boldsymbol{x}$ に線形関係 $y = a_0 + \sum_{j=1}^{p} a_j x_j$ があるものとする. n 組みの誤差を含む観測データ $(\boldsymbol{x}^{(1)}, y_1), \ldots, (\boldsymbol{x}^{(n)}, y_n)$ から a_i を求めることを考える. 次のように列ベクトルと行列を導入する.

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & \ldots & x_p^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & \ldots & x_p^{(2)} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_1^{(n)} & \ldots & x_p^{(n)} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

このとき残差平方和 $\sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i - (a_0 + \sum_{j=1}^{p} a_j x_j) \right\}^2$ が最小になるには $\boldsymbol{a}$ が次の方程式を満たせば良いことを証明せよ.

$${}^t X X \boldsymbol{a} = {}^t X \boldsymbol{y}$$

この方程式を正規方程式と呼ぶ.