物理数学 I 演習 (倉本)　　No.4　　2000 年 5 月 8 日

これから数週はベクトル解析の学習をおこなう．今後特に断らない限り，

- 3 次元直交座標系 (右手系) を考える
- x, y, z 成分を $1, 2, 3$ 成分あるいは x_1, x_2, x_3 成分ともあらわす
- $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ 3 次元直交座標系の基本ベクトルをあらわす (問題 3)．これを $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ あるいは $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ともあらわす
- 和の規約 (N0.3 問題 6) を用いる
- ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の長さ $|\boldsymbol{a}|$ を $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_i a_i}$ と定義する

1．(内積)　2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を次式で定義する

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta.$$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の成分を用いて表せ．

(2) 内積はスカラー積とも呼ばれる．スカラー量とは i) 座標それぞれの点に対して一つの数値で表され，ii) 座標回転に対して不変な量のことを言う．内積がスカラー量であることを成分計算により示せ．

2．(外積)　線形独立な 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し，第 3 のベクトルが次の性質を持つものとする．

i) $\boldsymbol{a}$ とも $\boldsymbol{b}$ とも直交する

ii) 長さは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい

iii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 第 3 のベクトルは右手系をなす

このように定めたベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の外積と呼び，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と記す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 外積を成分で表すと $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ と書き下すことができる．ここで添字 $_i$ $(i = 1, 2, 3)$ は各ベクトルの i 成分を表す．これが上記 i) – iii) の性質を満たしていることを示せ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の張る平行6面体の体積は $|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|$ で表されることを示せ．

(3) $\boldsymbol{bac}$ 公式 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ を証明せよ．

3．(勾配) 3次元直交座標系の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする．$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は，それぞれ x, y, z(または 1,2,3) 軸の正の向きを持ち，大きさは1である．x, y, z のスカラー関数 $f = f(x, y, z)$ がある時，点 P(x, y, z) における f の勾配ベクトル grad f は

$$\mathrm{grad}\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

で定義される．grad はグラジェントやグラッドと発音する．ハミルトンの演算子

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

を用いると

$$\mathrm{grad}\ f = \nabla f$$

とも表される．∇ はナブラと呼ぶ．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 固定点Pから一定の微少距離に点Qがある．ただし $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の方向は様々にとれるものとする．点Pから点Qに移動した時に f の値の変化が最大になるのは，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が点Pにおける grad f に平行な場合であることを示せ．

(2) $\mathrm{grad}\ f = \boldsymbol{e}_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ とも表せることを示せ．

(3) g をもう一つのスカラー関数とする時，以下の恒等式が成り立つことを示せ．

(i) $\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g$ $(a, b$ 定数$)$

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

(iii) $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

(iv) $\nabla(f(g)) = \dfrac{\partial f}{\partial g}\nabla g$

4. (勾配の具体例)　以下の 2 次元直交空間 (x, y) におけるスカラー関数 $f = f(x, y)$ について，i) grad $f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$ を求め，ii) 幾つかの等高線 $f =$ 一定 を図示し，等高線上の幾つかの点において grad f を矢印で表せ．

(1) $f = 2x - 3y$　　(2) $f = y/x$　　(3) $f = xy$　　(4) $f = 4x^2 + 9y^2$

5. (r の勾配)　位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ について，$r = |\boldsymbol{r}|$ と置く．このとき次の等式を証明せよ．

(1) $\nabla r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$　　(2) $\nabla f(r) = f' \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$　　(3) $\nabla \left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$　　(4) $\nabla \log r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}$

6. (保存力) 力 $\boldsymbol{F}$ があるスカラー関数 U を用いて $\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\ U$ と書けるとき，$\boldsymbol{F}$ は保存力と呼ばれる．質点 m が保存力 $\boldsymbol{F}$ のもとで運動するとき，運動エネルギーと U の和は一定に保たれることを示せ．

7. (方向微分) $\boldsymbol{u} = (l, m, n)$ を単位ベクトルとする．このとき極限値

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(x + l\Delta s, y + m\Delta s, z + n\Delta s) - f(x, y, z)}{\Delta s}$$

を f の u 方向の方向微分係数といい，$\dfrac{\partial f}{\partial u}$ と記す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{grad}\ f$ を証明せよ．

(2) $\left|\dfrac{\partial f}{\partial u}\right| \leq |\mathrm{grad}\ f|$ を証明せよ．また等号が成り立つのはどのような時か示せ．

8. (発散) 各成分が座標の関数となっているベクトル

$$\boldsymbol{A} = a_1(x,y,z)\boldsymbol{i} + a_2(x,y,z)\boldsymbol{j} + a_3(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

を考える (このとき $\boldsymbol{A}$ をベクトル場と呼ぶ)．$\boldsymbol{A}$ の発散 div $\boldsymbol{A}$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} &= \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\end{aligned}$$

で定義する．div はダイバージェンスと発音する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) ハミルトンの演算子を用いると div $\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$ ともあらわせることを示せ．

(2) $\varphi = \varphi(x,y,z)$ をスカラー関数とする時，等式 div $(\varphi \boldsymbol{A}) = (\mathrm{grad}\ \varphi) \cdot \boldsymbol{A} + \varphi \mathrm{div}\ \boldsymbol{A}$ を証明せよ．

(3) 等式 div (grad φ) $= \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ を証明せよ．

div (grad φ) は $\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \triangle \varphi$ といろいろな書き方をする．記号 $\triangle$ はラプラシアンと呼ぶ．

9. (発散の解釈) 流体が点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ において速度 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ を持つものとする．P を中心とし各稜の長さが $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ の小さな直方体を考える．ここで各稜はそれぞれ x, y, z 軸に平行である．この直方体から単位時間に流出する流体の総体積は近似的に

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{v})\Delta x \Delta y \Delta z$$

で与えられることを示せ．

10. (回転) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転 rot $\boldsymbol{A}$ は

$$\text{rot } \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

と定義される．行列式の算法を利用すると

$$\text{rot } \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

とも表現できる．rot はローテーションまたはロートと発音する．これを curl (カール) と記す場合もある．以下の問いに答えよ．

(1) ハミルトンの演算子を用いると rot $\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ とあらわせることを示せ．

(2) rot $\boldsymbol{A}$ の成分を ε_{ijk} を用いた記法で表せ．

(3) f をスカラー関数とする時，rot (grad f) $= 0$ を証明せよ．

(4) div (rot $\boldsymbol{A}$) $= 0$ を証明せよ．

(5) rot $(f\boldsymbol{A}) = (\text{grad } f) \times \boldsymbol{A} + f\text{rot } \boldsymbol{A}$ を示せ．

11. (rot rot $\boldsymbol{A}$)

(1) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \triangle \boldsymbol{A}$ を証明せよ．

(2) $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}$ が x, y, z, t のベクトル関数で

$$\begin{array}{ll} \text{div } \boldsymbol{E} = 0 & \text{div } \boldsymbol{H} = 0 \\ \text{rot } \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} & \text{rot } \boldsymbol{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{array}$$

を満たすならば，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ は以下の波動方程式を満たすことを示せ．

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \boldsymbol{E} \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \boldsymbol{H}$$

12. (回転の意味) 原点を通る固定軸のまわりに剛体が回転運動をしている．

(1) 角速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}$，各位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における速度を $\boldsymbol{v}$ とするとき，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ を示せ．

(2) $\boldsymbol{\Omega} = \dfrac{1}{2}\text{rot } \boldsymbol{v}$ を示せ．