

1. (曲線のパラメータ表示) 点 P の座標が変数 t の連続関数になっているとする. t の変化とともに P は空間曲線を描く. P の座標ベクトルを $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とすれば

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

である. これを曲線のパラメータ t による表示と呼ぶ. t が $a \leq t \leq b$ の範囲を変化する時, $t = a$ に対応する P の座標を始点, $t = b$ に対応する座標を終点と呼ぶ.

曲線上の各点の接線ベクトル $\mathbf{r}'(t)$ は

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

で与えられる. この式は以下のようにも書ける

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right) dt$$

$d\mathbf{r}$ は線素ベクトルとも呼ばれる.

t が微量変化する時の線素 (点 P の移動距離) ds は

$$ds = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = |\mathbf{r}'(t)| dt$$

で与えられる. これを始点から終点まで積分すると曲線全体の長さ s が得られる.

$$s = \int_0^s ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

以下具体例を考えよう. 曲線 $\mathbf{r}(t) = p \cos t \mathbf{i} + p \sin t \mathbf{j} + qt \mathbf{k}$ (p, q は実定数) について, 以下の問いに答えよ

- (1) この曲線の概形を図示せよ
- (2) 点 $(p, 0, 0)$ における接線ベクトルと, 接線の方程式を求めよ.
- (3) この曲線上の任意の点における接線は z 軸と定角をなすことを示せ.
- (4) $0 \leq t \leq 2\pi$ のとき, 曲線の長さを求めよ.

2. (線積分) ベクトル場 $A(\mathbf{r}) = (a_1(\mathbf{r}), a_2(\mathbf{r}), a_3(\mathbf{r}))$ の曲線 C に沿った線積分とは, A と線素ベクトル $d\mathbf{r}$ の内積を曲線全体に渡って足しあげたものとして定義される. 則ち

$$\begin{aligned} \text{曲線 } C \text{ 上のベクトル場の線積分} &= \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_C a_1(\mathbf{r})dx + \int_C a_2(\mathbf{r})dy + \int_C a_3(\mathbf{r})dz \end{aligned}$$

である. このとき C は積分路ともよばれる. C が変数 t でパラメータ表示されているとき, $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$ なので,

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

が成り立つ.

このとき以下の問いに答えよ

(1) $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$ のとき, 上式は曲線 C の長さを与えることを示せ.

(2) 2次元ベクトル場 $\mathbf{A} = (x - y, y - x)$ の点 $(0,0)$ から点 $(1,1)$ までの次の曲線 C_1, C_2, C_3 に沿った線積分をそれぞれ求めよ.

$$C_1 : y = x \quad C_2 : y = x^2 \quad C_3 : y^3 = x$$

(3) 2次元ベクトル場 $\mathbf{A} = (y, x)$ の点 $(0,0)$ から点 $(1,1)$ までの C_1, C_2, C_3 に沿った線積分をそれぞれ求めよ.

3. (勾配の線積分) スカラー場 φ の勾配 $\text{grad } \varphi$ を点 A から B にいたる曲線 C に沿って線積分する. このとき C の取り方によらず

$$\int_C \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

であることを示せ.

4. (保存ベクトル場) ベクトル場 A がある. 任意の2点を結ぶ曲線 C に沿った A の線積分が始点と終点の座標にのみ依存し, C の取りかたによらないとき, A はあるスカラー関数の勾配になっていることを示せ. スカラー関数の勾配であらわされるベクトル場は保存ベクトル場と呼ばれる.

5. (保存ベクトル場)

(1) $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ とするとき, 任意の閉曲線 C に対して

$$\oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

を示せ.

(2) φ, ψ を 2 つのスカラー場とするとき, 任意の閉曲線 C に対して

$$\oint_C \varphi \operatorname{grad} \psi \cdot d\mathbf{r} = - \oint_C \psi \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{r}$$

を示せ.