物理数学 I 演習 (倉本)　　No.6　　2000 年 5 月 22 日

1. (曲面のパラメーター表示) 点 P の座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ が 2 変数 u, v の連続関数である時，u, v の変化とともに P は曲面を描く．これを曲面のパラメーター u, v による表示と言う．これを成分で書き下すと

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}$$

となる．

　このとき v を固定して u を動かすと $\boldsymbol{r}(u,v)$ は 1 つの曲線を描く．これを u-曲線という．同様に u を固定して v を動かして得られる曲線を v-曲線という．u, v-曲線の接線ベクトル $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ はそれぞれ $\boldsymbol{r}_u = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}(u,v)}{\partial u}, \boldsymbol{r}_v = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}(u,v)}{\partial v}$ で与えられる．このとき以下の問いに答えよ．

(1) S 上の各点において S に垂直なベクトルを法線ベクトルと呼ぶ．$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ が点 $\mathrm{P}(u,v)$ における法線ベクトルであることを示せ．

(2) 近接した 2 本の u-曲線と近接した 2 本の v-曲線，計 4 本の曲線で囲まれた四辺形状の部分を考える．P_0=$\mathrm{P}(u,v)$，P_1=$\mathrm{P}(u, v+\Delta v)$，$\mathrm{P}_2$=$\mathrm{P}(u+\Delta u, v)$ とすれば，この部分はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}$ の作る平行四辺形で近似される．この部分の面積を ΔS とおくと，

$$\Delta S \approx |(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\Delta u\, \Delta v|$$

と近似できることを示せ．

　ここから定義される

　$d\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)du\,dv$ をベクトル面積素

　その大きさ $dS = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|du\,dv$ を単に面積素

という。面積素を足しあげることにより曲面 S の面積が求められる．つまり

$$\int_S dS = \int_S |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| du\, dv$$

である．

2. (球面のパラメーター表示)

(1) 原点を中心とする半径 ρ の球面は

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\theta, \phi) = \rho \sin\theta \cos\phi\, \boldsymbol{i} + \rho \sin\theta \sin\phi\, \boldsymbol{j} + \rho \cos\theta\, \boldsymbol{k}$$

とパラメータ表示できることを示せ．

(2) ベクトル面積素と面積素を求めよ．

(3) 球面の表面積は $4\pi\rho^2$ で与えられることを示せ．

3. (面積分) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の曲面 S 上における面積分は，$\boldsymbol{A}$ と面積素 $d\boldsymbol{S}$ の内積を面全体で足しあげたものとして定義される．$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,dS$ ($\boldsymbol{n} = (l, m, n)$ は単位法線ベクトル) を用いると，

$$\begin{aligned}
\text{曲面 } S \text{ 上のベクトル場 } \boldsymbol{A} \text{ の面積分} &= \int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \\
&= \int_S (a_1 l + a_2 m + a_3 n)\,dS
\end{aligned}$$

とあらわされる．このとき S を積分領域ともよぶ．S がパラメータ u, v によって表示されている時には，

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u,v))\cdot(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\,du\,dv$$

とあらわすことができる．

以下の問いに答えよ．

(1) f, g を u, v の関数とする．このときヤコビ行列式 (ヤコビアン) は以下のように定義される．

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}$$

これを用いると，

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

と書けることを示せ．

(2) 曲面 S が $z = f(x,y)$ の形で与えられている場合がある．パラメーターとして x, y を採用すると S は以下のように表示できる．

$$\boldsymbol{r}(x,y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + f(x,y)\boldsymbol{k}$$

このとき

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_D \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}|}dx\,dy$$

をしめせ．ここで積分領域 D は S の xy 平面への正射影である．

4. (ガウスの定理) 表面 S を貫くベクトル場 $\boldsymbol{J}$ の流束 (flux)Φ_S を以下の面積分で定義する．

$$\Phi_S = \int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}$$

このとき $\boldsymbol{J}$ は流束密度とも呼ばれる．以下の問いに答えよ．

(1) 密度 ρ，速度場 $\boldsymbol{v}$ をもつ流体を考える．流束密度を $\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{v}$ で与えた時，Φ_S が単位時間あたりに S を通過する流体の質量に等しいことを示せ．

(2) 各辺がそれぞれ x, y, z 軸に平行で，長さが $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ に等しい微少な直方体を考える．この微少直方体の表面を S とするとき，

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \Phi_S = \mathrm{div}\ \boldsymbol{J}$$

を証明せよ．

(3) 有限な体積を V，その表面を S とする．いま V が多数の微少体積に分割されているものとする．このときスカラー場 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ の体積分は，各位置における微少体積とスカラー場との積を全て足しあげたものとして定義される．これを以下のように記す．

$$\text{スカラー場}\ \varphi\ \text{の体積分} = \int_V \varphi dV$$

このとき，

$$\int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\ \boldsymbol{J}\, dV$$

が成り立つことを示せ．これは体積中の全発散が，表面を通過する全流束に等しいことを示すものである．これをガウスの (発散) 定理という．

5．(連続の方程式：例) $T = T(x, y, z)$ を温度場とする．点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における熱流束 (単位時間に単位面積を通過するエネルギー) は，$\boldsymbol{J} = -K\mathrm{grad}\ T$ と書ける．ここで K は物質に固有な定数 (熱伝導率) である．符号 $-$ は温度の高い方から低い方へ熱が流れることをあらわす．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 物体の密度を ρ, 単位質量当たりの内部エネルギーを ε とする．ある領域の体積を V，その表面を S とするとき

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\varepsilon dV = \int_S K\mathrm{grad}\ T \cdot d\boldsymbol{S}$$

が成り立つことを示せ．ここで t は時間である．

(2) c_p を単位質量当たりの比熱とする．このときガウスの定理を用いて，

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}\ (K\mathrm{grad}\ T)$$

を示せ．特に K が位置に依らない定数の時，

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = K \triangle T$$

となる．これを熱伝導方程式という．

6. (ガウスの積分) 閉曲面 S がある．$\boldsymbol{r}$ を位置ベクトル，$r = |\boldsymbol{r}|$ とする時,

$$\int_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3} dS = \begin{cases} 0 & S\text{が原点を含まない時} \\ 2\pi & \text{原点が } S \text{ 上にある時} \\ 4\pi & \text{原点が } S \text{ 内にある時} \end{cases}$$

を証明せよ.

7. (ガウスの積分の応用)

(1) 質点 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ が位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ に存在する．このとき位置 $\boldsymbol{r}$ において単位質量に作用する万有引力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = G\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}|^3}$$

で与えられる．S を閉曲面とする時

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = -4\pi G \times (S\text{ 中の質量の総和})$$

となることを証明せよ.

(2) 質量が連続的に分布している場合を考える．各位置の密度を $\rho(\boldsymbol{r})$ とすると，重力ポテンシャル Φ は次の式に従うことを示せ.

$$\triangle\Phi = 4\pi G\rho$$

これをポアソンの方程式という.