物理数学 I 演習 (倉本)　　No.7　　2000 年 5 月 29 日

1．(平面に対するグリーンの定理)　$\boldsymbol{J}(x,y) = u(x,y)\boldsymbol{i} + v(x,y)\boldsymbol{j}$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 体積 V として z 軸に平行な柱体 (z 軸に垂直な断面はどこも同じ形状とする) を考える．このとき，V の表面 S でのベクトル面積素 $d\boldsymbol{S}$ が $d\boldsymbol{S} = dz(dy\boldsymbol{i} - dx\boldsymbol{j})$ で与えられることを示せ．

(2) ガウスの定理を用いて

$$\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (udy - vdx)$$

を示せ．ここで S は $z=0$ における V の断面，積分経路 C は S の境界線である．

2．(ストークスの定理)　ベクトル場 $\boldsymbol{J}$ を閉曲線 C について線積分したものを，$\boldsymbol{J}$ の C についての循環という．循環を記号 Γ であらわすと

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{r}$$

である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 $\mathrm{P}_0 = (x,y,z)$, $\mathrm{P}_1 = (x+\Delta x, y, z)$, $\mathrm{P}_2 = (x, y+\Delta y, z)$ を取り，$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}$ の作る平行四辺形の周を C とする．このとき

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{\Gamma}{\Delta x \Delta y} = (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{J}) \cdot \boldsymbol{k}$$

を示せ．これは回転の z 成分が，z 軸に直交する無限小面積の周についての循環 (ただし単位面積当たり) に等しいことを意味する．

(2) $\mathrm{P}_1 = (x+\Delta x_1, y+\Delta y_1, z+\Delta z_1)$, $\mathrm{P}_2 = (x+\Delta x_2, y+\Delta y_2, z+\Delta z_2)$ とするとき，

$$\lim_{\Delta x_{1,2}, \Delta y_{1,2}, \Delta z_{1,2} \to 0} \frac{\Gamma}{\Delta S} = (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{J}) \cdot \boldsymbol{n}$$

を示せ．ここで ΔS は $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}$ の作る平行四辺形の面積，$\boldsymbol{n}$ はその法線ベクトルである．

(3) C を有限な閉曲線，S をその内部を満たす面とする時，

$$\oint_C \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \mathrm{rot}\ \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}$$

が成り立つことを示せ．これをストークスの定理という．

3. (ストークスの定理の応用)

(1) ストークスの定理を用いて rot grad $\varphi = 0$ を証明せよ．

(2) 任意の閉曲線 C において

$$\oint_C f\,\mathrm{grad}\ g \cdot d\boldsymbol{r} = -\oint_C g\,\mathrm{grad}\ f \cdot d\boldsymbol{r}$$

を示せ．

(3) $\boldsymbol{r} = (x, y, z), r = |\boldsymbol{r}|$ とするとき，任意の閉曲線 C において

$$\oint_C r^k \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

を示せ．ただし k は整数とする．

4. (一般化座標) 座標 $\boldsymbol{r}$ を直交直線座標 (x, y, z) に代わる 3 つの変数 (u, v, w) で表す場合を考える．u, v, w はそれぞれ x, y, z の関数である．例えば円筒座標では変数として (r, ϕ, z) を用い，それぞれ x, y, z と次の関係にある．

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),\ z = z$$

球座標 (r, θ, ϕ) では

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \theta = \arctan\left(\frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right)^{1/2},\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

である．

(1) 直交直線座標と円筒座標の幾何学的関係を図示し，(x, y, z) を (r, ϕ, z) を用いて表せ．

(2) 直交直線座標と球座標の幾何学的関係を図示し，(x, y, z) を (r, θ, ϕ) を用いて表せ．

u 曲線とは，v, w を固定して u を変化させた時に座標 $\boldsymbol{r}$ が描く軌跡のことを言う．その接ベクトル $\boldsymbol{r}_u$ は次式で与えられる

$$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{e}_z$$

v, w 曲線およびその接ベクトル $\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_w$ は同様に定義される．これら接ベクトルの方向をそれぞれ u, v, w 方向という．

(3) 円筒座標において $\boldsymbol{r}_r, \boldsymbol{r}_\phi, \boldsymbol{r}_z$ を $r, \phi, z, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ を用いて表せ．

(4) 球座標において $\boldsymbol{r}_r, \boldsymbol{r}_\theta, \boldsymbol{r}_\phi$ を $r, \theta, \phi, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ を用いて表せ．

u 曲線のスケール因子 h_u とは，u 方向接ベクトルの長さ $|\boldsymbol{r}_u|$ のことを言う．ここから u 方向単位ベクトル $\boldsymbol{e}_u$ が

$$\boldsymbol{e}_u = \frac{\boldsymbol{r}_u}{h_u} \text{ または } \boldsymbol{r}_u = h_u \boldsymbol{e}_u$$

と定義される．v, w 曲線のスケール因子 h_v, h_u，v, w 方向単位ベクトル $\boldsymbol{e}_v, \boldsymbol{e}_w$ も同様に定義される．$\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v, \boldsymbol{e}_w$ は一般化座標系 (u, v, w) での基本単位ベクトルである．

(5) 円筒座標において h_r, h_ϕ, h_z を求めよ．

(6) 球座標において h_r, h_θ, h_ϕ を求めよ．

5.（面積素と体積素） 一般化座標 (u_1, u_2, u_3) における面積素 $d\boldsymbol{S}_{ij}$ と体積素 dV はそれぞれ

$$d\boldsymbol{S}_{ij} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{r}_j du_i\, du_j$$

$$dV = |\boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3)| du_1\, du_2\, du_3$$

であらわされる．ただし，ここでは和の規約は用いず，式の簡略化のため $\boldsymbol{r}_{u_j} = \boldsymbol{r}_j, h_{u_j} = h_j$ と記す．

(1) 各点で接ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ (i=1,2,3) が互いに直交している座標系を直交曲線座標という．このとき

$$d\boldsymbol{S}_{ij} = h_i h_j \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j du_i du_j = \varepsilon_{ijk} h_i h_j \boldsymbol{e}_k du_i du_j$$

$$dV = h_1 h_2 h_3\, du_1\, du_2\, du_3$$

を示せ．ここで $\boldsymbol{e}_j$ は u_j 方向基本単位ベクトルをあらわす．和の規約は用いない．

(2) 円筒座標と球座標は直交曲線座標であることを示せ

(3) 円筒座標と球座標における体積素の表式をそれぞれ求めよ．

6. (直交曲線座標における grad) スカラー場 φ の勾配 grad φ はベクトルであり，直交直線座標系の基本単位ベクトルを用いて

$$\mathrm{grad}\ \varphi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i$$

と表される．これを直交曲線座標 (u_1, u_2, u_3) で表すには，この直交曲線座標の基本単位ベクトル $\boldsymbol{e}_{u_j}$ を用いる．各成分 $(\mathrm{grad}\ \varphi)_{u_j}$ は grad φ を各基本単位ベクトルの方向に射影したものなので

$$(\mathrm{grad}\ \varphi)_{u_j} = \mathrm{grad}\ \varphi \cdot \boldsymbol{e}_{u_j} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_{u_j}$$

となる．

このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_{u_j} = \dfrac{1}{h_j}\dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}$ を示せ．この表式では和の規約は用いず，スケール因子は $h_{u_j} = h_j$ と記すものとする [ヒント：問題 4 の $\boldsymbol{e}_{u_j}$ の定義を思い出す].

(2) 恒等式 $\dfrac{df(x_1(\xi), x_2(\xi), x_3(\xi))}{d\xi} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{dx_i}{d\xi}$ を利用し，

$$(\mathrm{grad}\ \varphi)_{u_j} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$$

を示せ．この表式も和の規約は用いない．

(3) 円筒座標における勾配は

$$\mathrm{grad}\ \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

と表されることを示せ．

(4) 上と同様に，球座標における grad φ の表式を書き下せ．