物理数学 I 演習 (倉本)　　No.8　　2000 年 6 月 5 日

1. (直交曲線座標における div) 直交曲線座標 (u_1, u_2, u_3) で表されるベクトル場 $\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}_{u_i}$ の発散の表式について考える．これは発散の定義から丹念に計算しても導けるが面倒である．ここではガウスの定理 $\int_V \mathrm{div}\ \boldsymbol{A} dV = \int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ を使った導出を行う．

(1) 体積 V として，u_i, $u_i + \Delta u_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 一定の面で囲まれた微少 6 面体を考える．このとき

$$\int_V \mathrm{div}\ \boldsymbol{A} dV \approx \mathrm{div}\ \boldsymbol{A}\, h_1 h_2 h_3 \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

を示せ．ただしスケール因子は $h_{u_j} = h_j$ と記す．

(2)

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} \quad = \quad & \int_{u_2}^{u_2+\Delta u_2} \int_{u_3}^{u_3+\Delta u_3} [A_1 h_2 h_3 du_2 du_3]_{u_1=u_1}^{u_1=u_1+\Delta u_1} \\ + \quad & \int_{u_3}^{u_3+\Delta u_3} \int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} [A_2 h_3 h_1 du_3 du_1]_{u_2=u_2}^{u_2=u_2+\Delta u_2} \\ + \quad & \int_{u_1}^{u_1+\Delta u_1} \int_{u_2}^{u_2+\Delta u_2} [A_3 h_1 h_2 du_1 du_2]_{u_3=u_3}^{u_3=u_3+\Delta u_3}\end{aligned}$$

を示せ．右辺はさらに

$$\approx \left(\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3} \right) \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

と近似できることを示せ．(1) と比較すると div $\boldsymbol{A}$ は

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial A_1 h_2 h_3}{\partial u_1} + \frac{\partial A_2 h_3 h_1}{\partial u_2} + \frac{\partial A_3 h_1 h_2}{\partial u_3} \right)$$

と書けることが分かる．これが曲線直交座標系での発散の一般形である．

2. (円筒座標，球座標における div)

(1) 円筒座標における div $\boldsymbol{A}$ の表式を求めよ

(2) 球座標における div $\boldsymbol{A}$ の表式を求めよ

3. (直交曲線座標における rot) 直交曲線座標 (u_1, u_2, u_3) で表されるベクトル場 $\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}_{u_i}$ の回転の表式について考える．これは回転の定義から丹念に計算しても導けるが面倒なので，ここではストークスの定理 $\int_S \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} dS = \oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を使った導出を行う．

(1) u_3 が一定の面内で $u_2, u_2 + \Delta u_2$ 一定の 2 本の u_1 曲線と，$u_1, u_1 + \Delta u_1$ 一定の 2 本の u_2 曲線, 計 4 本の曲線で囲まれた内部を面 S にとる．このとき

$$\int_S \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} \approx (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A})_3\, h_1 h_2 \Delta u_1 \Delta u_2$$

を示せ．ここで $(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A})_3$ は $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}$ の u_3 方向成分を表す．スケール因子は $h_{u_j} = h_j$ と略記している．

(2) 線積分を $(u_1, u_2) \to (u_1 + \Delta u_1, u_2) \to (u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2) \to (u_1, u_2 + \Delta u_2) \to (u_1, u_2)$ の順に行うことに注意して

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{u_1}^{u_1 + \Delta u_1} [A_1 h_1]_{u_2 = u_2}^{u_2 = u_2 + \Delta u_2} du_1 + \int_{u_2}^{u_2 + \Delta u_2} [A_2 h_2]_{u_1 = u_1 + \Delta u_1}^{u_1 = u_1} du_2$$

を示せ．右辺はさらに

$$\approx \left(\frac{\partial A_1 h_1}{\partial u_2} - \frac{\partial A_2 h_2}{\partial u_1} \right) \Delta u_1 \Delta u_2$$

と近似できることを示せ．(1) と比較すると，

$$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A})_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial A_2 h_2}{\partial u_1} - \frac{\partial A_1 h_1}{\partial u_2} \right)$$

が導かれる．$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}$ の各 u_i 成分の一般的な表式は

$$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{1}{h_j h_k} \frac{\partial A_k h_k}{\partial u_j}$$

である．

4. (円筒座標，球座標における rot)

(1) 円筒座標における $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}$ の各成分の表式を求めよ

(2) 球座標ににおける $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}$ の各成分の表式を求めよ

5. (直交曲線座標における $\triangle$)

(1) grad , div の一般形から直交曲線座標における $\triangle\varphi = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)$ の一般形を導け.

(2) 円筒座標における $\triangle\varphi$ の表式を求めよ

(3) 球座標における $\triangle\varphi$ の表式を求めよ