

解答上の注意

- 1) 答案用紙 3 枚, 計算用紙 1 枚
- 2) 答案用紙は裏面も使って良い. そのときは表に「裏へ」と明記すること.
- 3) 答案の並びは, 問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
- 4) 持ち込み不可.

1. 添字 i, j, k は 1, 2, 3 いずれかの番号をとるものとする. クロネッカーの記号 δ_{ij} とレビ・チビタの記号 ε_{ijk} は以下のように定義される.

$$\begin{array}{ll}
 i \neq j \text{ のとき} & \delta_{ij} = 0 \\
 i = j \text{ のとき} & \delta_{ij} = 1 \\
 ijk \text{ が } 123 \text{ の偶置換とき} & \varepsilon_{ijk} = 1 \\
 ijk \text{ が } 123 \text{ の奇置換とき} & \varepsilon_{ijk} = -1 \\
 2 \text{ つ以上の添字が同じ番号のとき} & \varepsilon_{ijk} = 0
 \end{array}$$

和の規約とは, 項の中に同じ添字記号があらわれたら, その取りうるすべての番号について自動的に和をとることを言う. 例えば 3 次元直交座標における 2 つのベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の内積は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

が定義だが, 和の規約を用いると簡潔に

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$$

とあらわされる.

このとき以下の等式が成り立つことを示せ.

- (1) $\delta_{ii} = 3$ (2) $\delta_{ij}\delta_{ik} = \delta_{jk}$ (3) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{ij}a_i b_j$ (4) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0$ (5) $\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jpr} = 2\delta_{ij}$
- (6) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$ (7) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$