物理数学 I 演習 (倉本)　　No.10　　2000 年 7 月 3 日

1. (ベキ級数)　以下の形のベキ級数を考える．

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

ここで z は複素変数，$a_n\,(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は複素定数である．$z = re^{i\theta}$ と極表示すると式 (1) は

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \exp(in\theta)$$

と書ける．このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

が収束すれば式 (1) は絶対収束する．以下の問いに答えよ．

(1) 次式で R を定義する．

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

このとき，$|z| < R$ なら式 (1) は絶対収束し，$|z| > R$ なら発散することを示せ．

(2) R を以下のように定義する．

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

このときも $|z| < R$ なら式 (1) は絶対収束し，$|z| > R$ なら発散することを示せ．

(3) (1), (2) の R は結局同一のものである．R を収束半径という．以下の複素ベキ級数の収束半径を求めよ．

$$\text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

2. (ゼロ点・特異点)　複素関数 $f(z)$ が正則でない点を $f(z)$ の特異点という．点 $z = z_0$ では正則でないがその近傍の全ての点では正則な時，$z = z_0$ は孤立特異点と呼ばれる．孤立特異点のなかで最も重要なタイプは極 (pole) と呼ばれるものである．$f(z)$ が $z = z_0$ 近傍で以下のように書けるとき,「$f(z)$ は $z = z_0$ で n 位の極を持つ」という．

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

ただし $g(z)$ は $z = z_0$ においても正則な関数，n は自然数である．別の表現では

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = a \tag{2}$$

が一意に定まるとき，$f(z)$ は $f(z)$ は $z = z_0$ で n 位の極を持つ．ここで a は 0 でない有限な複素定数である．

(1) 次の関数の特異点を全て見つけ，それぞれ何位の極か調べよ．

$$\text{(i)}\ f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} \qquad \text{(ii)}\ f(z) = \tanh z \qquad \text{(iii)}\ f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$$

(2) $f(z)$ が $z = z_0$ で $0/0$ の形になることがある．このとき $\lim_{z \to z_0} f(z)$ が $z \to z_0$ の近づけ方によらずに一意に定まるとき，このような孤立特異点を除きうる特異点と呼ぶ．

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

は除きうる特異点を持つことを示せ．

(3) 孤立特異点のうち，式 (2) を満たす自然数 n が存在せず，しかも除きうる特異点でないものを真正特異点という．

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

は原点に真性特異点を持つことを示せ．

3. (無限遠点) 複素関数 $f(z)$ の「無限遠点」における振る舞いとは，$\zeta = 1/z$ とおき，$f(1/\zeta)$ の $\zeta = 0$ における振る舞いとして定義する．次の関数は無限遠点において正則か．正則でない場合，無限遠点はどのような特異点となっているか．

(1) $f(z) = a + bz^{-2}$ a, b は複素定数 (2) $f(z) = z(1 + z^2)$ (3) $f(z) = \exp z$

4. (複素ポテンシャル論) $f(z)$ を正則な複素関数とする．$z = x + iy\,(x, y \in \boldsymbol{R})$, $\mathrm{Re} f(z) = u(x, y)$, $\mathrm{Im} f(z) = v(x, y)$ とするとき以下の問いに答えよ．

(1) u, v はそれぞれ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

を満たすことを示せ (この形の偏微分方程式を 2 次元の Laplace 方程式という)．

(2) xy 平面 (複素平面) 上に u, v の等値線を描く．この時 u の等値線と v の等値線は直交することを示せ．(ヒント：2 次元の勾配は grad $= \boldsymbol{i}\partial_x + \boldsymbol{j}\partial_y$．勾配ベクトルは等値線と直交する性質を利用する)

(3) 流れがある関数の勾配で記述できる時，このような流れをポテンシャル流と呼ぶ．2 次元流 (流速場 $\boldsymbol{V} = V_x(x, y)\boldsymbol{i} + V_y(x, y)\boldsymbol{j}$) が $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{i}\partial_x u + \boldsymbol{j}\partial_y u$ と書ける場合，u を速度ポテンシャルと呼ぶ．u を速度ポテンシャルとする流れは非発散であることを示せ．(このとき v は流線関数と呼ばれその等値線は流線をあらわす)

5．(複素ポテンシャル論続き) 正則な関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の u を速度ポテンシャルに持つ 2 次元流を考える．

(1) $f(z) = Ue^{-i\alpha}z$ は一様流をあらわすことを示せ $(U, \alpha \in \boldsymbol{R})$

(2) $f(z) = m \ln z$ は原点からのわき出し流をあらわすことを示せ $(m \in \boldsymbol{R})$

(3) $f(z) = -i\kappa \ln z$ は原点の周りを回る流れをあらわすことを示せ $(\kappa \in \boldsymbol{R})$

(4) $f(z) = U\left(z + \dfrac{a^2}{z}\right)$ は xy 面を垂直に貫く半径 a の円筒を横切る流れをあらわすことを示せ $(U, a \in \boldsymbol{R}, a > 0)$

6．(等角写像) $z = x + iy, w = r + is$ とする．$x, y, r, s \in \boldsymbol{R}$．$(x, y)$ を座標にとった平面を z 平面，(r, s) を座標にとった平面を w 平面と呼ぶことにする．z 平面上の点 (x, y) が関数 $w = g(z)$ によって w 平面上の点 (r, s) に写像されているものとする．ここで $g(z)$ は有限個の点を除いて正則とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) z 面上での点 z_0, z_1, z_2 が w 面上の点 w_0, w_1, w_2 へそれぞれ写像されるとき

$$\lim_{z_1 \to z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \to z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0}$$

が成り立つことを示せ．ただし z_0, z_1, z_2 は $g(z)$ の特異点から離れているものとする．

(2)

$$z_1 - z_0 = \rho_1 e^{i\theta_1},\ z_2 - z_0 = \rho_2 e^{i\theta_2}$$

とする．ここで $\rho_{1,2}$,$\theta_{1,2}$ は定実数である．同様に

$$w_1 - w_0 = \rho_1' e^{i\phi_1},\ w_2 - w_0 = \rho_2' e^{i\phi_2}$$

$(\rho_{1,2}', \phi_{1,2} \in \boldsymbol{R})$ と書く時，$\rho_{1,2}$ が十分小さければ

$$\frac{\rho_1'}{\rho_1} \approx \frac{\rho_2'}{\rho_2},\ \phi_1 - \phi_2 \approx \theta_1 - \theta_2$$

が成り立つことを示せ．上の第2の式は，写像を施しても2線分のなす角が保たれることを意味する．このため正則関数の作る写像は等角写像と呼ばれる．第1の式とあわせると，z 平面上の微少図形はそれに相似な微少図形に写像されることが分かる．

(3) z_0 を z 平面の上半面 ($\mathrm{Im}\ z \geq 0$) 内の点とする．このとき

$$w = (e^{i\phi})\frac{z - z_0}{z - z_0^*}$$

は z 平面の上半面を w 平面の単位円に写像することを示せ．ここで ϕ は実定数である．この写像によって点 $z = i$, $x = \pm\infty(y = 0)$ はそれぞれどのような点に移るか．