物理数学 I 演習 (倉本)　　No.11　　2000 年 7 月 10 日

1. (導関数の積分表示) $f(z)$ を閉曲線 C 上とその内部で正則な関数とする時，コーシーの積分公式が成り立つ．

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

ここで a は C 内部の任意の点である．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(z)$ を $f(z)$ の導関数とする．このとき

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

を証明せよ．

(2) $f^{(n)}(z)$ を $f(z)$ の n 階導関数とする．このとき

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

を証明せよ．

(3) C を点 $z = a$ を中心とする半径 R の円とする．もし $|f(z)| \leq M$ (ここで M はある正の実数) ならば，

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{R^n}$$

が成り立つことを証明せよ．この不等式をコーシーの不等式という．

2. (リュービュルの定理)

(1) コーシーの不等式を用いることにより，もし関数 $f(z)$ が全ての z に対して正則でかつ有界 ($|f(z)| < \infty$) ならば f は定数であることを証明せよ．これをリュービュル (Liouville) の定理という．

(2) 複素数 $a_0, \cdots, a_n$ を係数に持つ代数方程式

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

は必ず根を持つことを証明せよ．(ヒント：$f(z) = 1/(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n)$ に対してリュービュルの定理を使う)

3. (テイラー展開)　もし $f(z)$ が $z=a$ を中心とする半径 R の円周 C 上およびその内部で正則ならば，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n \tag{1}$$

$$A_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

とあらわすことができる．ここで z は C 内部の任意の点である．これをテイラー (Taylor) の定理と言い，式 (1) をテイラー級数という．以下でこの定理を証明しよう．

(1) $z=\xi$ を C 上の点とする．このとき

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n$$

を示せ (ヒント：$|r|<1$ のとき $1/(1-r)=1+r+r^2+\cdots$ を思い出す)．右辺の級数が絶対収束することを確かめよ．

(2) コーシーの積分公式を以下の形に書く．

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

ここに (1) で証明した式を代入することにより

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi$$

を示せ．

(3) 導関数の積分表示を用い，テイラーの定理が成り立つことを示せ．

4. (ローラン展開)　関数 $f(z)$ が $z=a$ に特異点を持つがその近傍の点では正則な場合を考える．このとき $z=a$ の周りでテイラー級数には展開できない．しかしこれを拡張したローラン (Laurant) 級数に展開することができる (次式)．

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n \tag{2}$$

テイラー級数との違いはベキが負の項も含む点である．以下では A_n の形を決定しよう．

(1) $f(z)$ は円環領域 $R_1 \leq |z-a| \leq R_2$ において正則とする $(R_{1,2} \in \boldsymbol{R},\ 0 < R_1 < R_2)$. $C_1 = \{z \,|\, |z-a| = R_1\}, C_2 = \{z \,|\, |z-a| = R_2\}$ とするとき

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta$$

を示せ.

(2) 収束性に注意して

$$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi - a}{z - a}\right)^n$$

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{\eta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - a}{\eta - a}\right)^n$$

を示せ.

(3) n の正負に関わらず

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

が成り立つことを示せ．ここで C は C_1 と C_2 との間に任意に描いた同心円である.

式 (2) を $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} A_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z-a)^n$ と書いたとき，負ベキ項からなる右辺の第 1 の級数を主要部，第 2 の級数を解析部という．A_{-1} は特別な性格を持つことから留数と呼ばれる (問題 6)．$z=a$ が $f(z)$ の p 位の極であるとき，$n < -p$ の A_n は全て 0 となり主要部は有限項で表わされる．$z=a$ が真性特異点のときは，主要部は無限級数となる.

5. (関数展開の具体例)

(1) 次の関数を，$z=0$ と $z=2$ の周りでそれぞれローラン級数に展開せよ.

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$$

(2) 次の関数を原点の周りで級数展開せよ.

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

ここで $|z| < 1, 1 < |z| < 2, |z| > 2$ の 3 つの領域ごとに展開の形が異なることに注意せよ.

6. (留数定理)

(1) $f(z)$ が $z=a$ に p 位の極を持ち，$z=a$ の周りで以下のようにローラン級数に展開されている．

$$f(z)=\sum_{n=-p}^{\infty}A_n(z-a)^n$$

$f(z)$ を $z=a$ を内部に含む閉曲線 C に沿って積分する．C 上および内部では $f(z)$ は $z=a$ を除き正則とする．このとき

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i A_{-1}$$

を示せ．

(2) C 上および内部で $f(z)$ は有限個の極を除いて正則とする．このとき

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_j R_j$$

を示せ．ここで R_j は C 内部の $f(z)$ の各々の極の留数である．

7. (留数の求め方)

(1) $z=a$ が関数 $f(z)$ の p 位の極のとき，

$$(z=a\text{ における留数})=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}(z-a)^p f(z)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(z)=P(z)/Q(z)$ で $P(z)$ が正則，$Q(z)$ が $z=a$ で一位のゼロ点を持つならば

$$(z=a\text{ における留数})=\frac{P(a)}{Q'(a)}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の関数の極における留数を求めよ．

i) $\dfrac{z^3+5}{z(z-1)^3}$ ii) $\dfrac{\cos z}{z^3}$ iii) $\dfrac{1}{\sin z}$ iv) $\dfrac{z^2e^z}{1+e^{2z}}$

8. (留数解析：三角関数の定積分) 三角関数で記述される関数 $F(\cos\theta, \sin\theta)$ の以下のような定積分を留数を使った方法で求めてみよう.

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$$

$z = e^{i\theta}$ と変数変換する.

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \qquad d\theta = -iz^{-1}\, dz$$

なので

$$I = \oint_C G(z)\, dz = 2\pi i \times (G \text{ の } C \text{ 内の留数の和})$$

となる．ここで積分路 C は複素平面上の単位円 $(|z| = 1)$．$G(z)$ は $F(z)$ を用いて以下のように与えられる.

$$G(z) = -iz^{-1} F(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i})$$

以下の定積分を留数を用いた方法で計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta} d\theta \quad (0 \le a \le b)$ (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos\theta} d\theta \quad (0 \le a \le 1)$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a + b\cos\theta} d\theta \quad (0 \le b \le a)$ (4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos k\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta \quad (|a| \ne 0, k : \text{自然数})$

9. (留数解析：実軸上の定積分) $f(z)$ が次の性質を持つとする.

- $f(z)$ は複素平面の上半面 $(\mathrm{Im}(z) > 0)$ で有限個の極を除いて正則．ただし実軸上には極はない.
- $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} z f(z) = 0$

このとき以下の問いに答えよ.

(1) 以下の公式が成り立つことを示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \times (\text{上半面における留数の和})$$

(2) 次の定積分を求めよ．$a \in \boldsymbol{R}$ とする.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$ (ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + a^4} dx$ (iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + a^4} dx$