物理数学演習 I (倉本)　　No.12　　2000 年 9 月 11 日

1．(留数解析：実軸上の定積分 2)　$f(z)$ が次の性質を持つとする．

- $f(z)$ は複素平面の上半面 ($\mathrm{Im}(z) \geq 0$) で有限個の極を除いて正則．ただし実軸上には極はない．
- $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) 図のように原点を中心とする半径 R の半円を Γ とする (R : 始点，$-R$: 終点)．$m > 0$ のとき

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma e^{imz} f(z)dz = 0$$

を示せ (これをジョルダン (Jordan) の補助定理という)．

(2) 次の定積分を求めよ．ただし $a > 0, m > 0$ とする．

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + a^2} dx$　　(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx$

2．(留数解析：積分の主値)　関数 $f(z)$ が実軸上 ($z = z_0$) に極を 1 つ持つ場合にどのように定積分を行うか考えよう．$f(z)$ は $z = z_0$ 以外の点では有限個の極を除いて正則とする．このとき積分の主値 $P\displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)dx$ を以下のように定義する．

$$P\int_{-R}^{R} f(x)dx \equiv \int_{-R}^{z_0-\epsilon} f(x)dx + \int_{z_0+\epsilon}^{R} f(x)dx \; (\epsilon \to 0)$$

ここで $R, \epsilon > 0$ である．図のような積分路を考えよう．Γ を R を始点，$-R$ を終点とする半球弧，γ を極 $z = z_0$ を中心とする半径 ϵ の半球弧 (始点 $z_0 - \epsilon$，終点 $z_0 + \epsilon$) とする．このとき

(1) $\int_\Gamma f(z)dz + P\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \times$ (実軸, Γ, γ の囲む領域内の留数の和) を示せ．

(2) $\int_\gamma f(z)dz = -\pi i A_{-1}(z_0)$ を示せ．ここで $A_{-1}(z_0)$ は $z = z_0$ の留数である．

(3) $\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0$ ならば

$$P\int_{-R}^{R} f(x)dx = \pi i A_{-1}(z_0) + 2\pi i \times (\mathrm{Im}\ z > 0 \text{ における留数の和})$$

であることを示せ．

(4) 次の積分を求めよ．

(i) $P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x-a}dx \, (a \in \boldsymbol{R}, m > 0)$　　(ii) $P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx$　　(iii) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$

3. (多価関数：分枝)　関数 $w = f(z)$ において，z の 1 つの値に対し w の値が複数個存在する場合，w を z の多価関数とよぶ．その例として関数 $w = z^{1/2}$ を考えよう．この場合 $z = re^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ に対して 2 つの異なる関数値 w_1, w_2

$$w_1 = r^{1/2}e^{i\theta/2}, w_2 = r^{1/2}e^{i\theta/2+i\pi}$$

が対応する．すなわち $w = z^{1/2}$ は z の 2 価関数であることがわかる．この w_1, w_2 を，$w = z^{1/2}$ の分枝 (ぶんし) と呼ぶ．

(1) 次の関数の分枝を求めよ．

i) $w = z^{1/3}$　　ii) $w = (z-1)^{1/2}$　　iii) $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$　　iv) $w = \log z$

さらに $w = z^{1/2}$ を例に話を進める．z 平面上で与えられた点 P から出発し，原点を反時計周りに 1 周して元の点 P に戻ると z の偏角は 2π 増える．このとき各分枝の偏角は π 増えるから w_1 は w_2 に w_2 は w_1 に移る．

一般に z 平面上のある点を 1 周することによりある分枝から別の分枝へ移るとき，この点を分岐点 (ぶんきてん) と呼ぶ．$z = 0$ は $w = z^{1/2}$ の分岐点である．実は $z = \infty$(無限遠点) も $w = z^{1/2}$ の分岐点である．これは原点を 1 周することが無限遠点の周りを 1 周することにもなっているからである (一般に十分半径の大きな円周を 1 回転することで別の分枝へ移るとき，無限遠点は分岐点である)．また分岐点を n 周して最初の分枝に戻る時，その分岐点を $n-1$ 位の分岐点と呼ぶ．$w = z^{1/2}$ の例では $z = 0, \infty$ は共に 1 位の分岐点である．n が有限の分岐点は代数的分岐点，無限大の分岐点は対数的分岐点と呼ばれる．

(2) (1) の i)〜iv) の関数の分枝点を求めよ．それぞれ何位の分岐点か．

(3) 一般に分岐点は微分可能か

4. (多価関数：Riemann (リーマン) 面) z 平面を複数枚，分枝の数だけ用意し，1 枚 1 枚の z 平面上の点はそれぞれ相異なる 1 つの分枝に写像されるものとする．また各平面には切れ目が入っており，切れ目を介して他の面へ連続的に乗り移れるものとする．このように複数枚の z 平面をつなぎ合わせた平面を Riemann 面という．こうすると Riemann 面上の点と関数値とは 1 対 1 対応になる．切れ目は切断 (cut) と呼び，おのおのの z 平面を葉 (よう) という．

再び $w = z^{1/2}$ を例に取って Riemann 面の作り方を説明する．この場合分枝は 2 つあるから z 平面を 2 枚用意する．葉 1 では w_1 へ写像され，葉 2 では w_2 へ写像される．切れ目は分岐点を繋ぐようにいれるのが決まりである．ただし繋ぎ方は 1 意ではなく任意性がある．この場合 $z = 0, \infty$ が分岐点だった．そこで実軸の正の部分 $x > 0$ を切断に選ぶ．葉 1 上にあった点を原点の周りに反時計周りに動かす．このとき最初に切断をまたぐとき葉 2 へ移り，次に切断をまたぐ時は葉 1 に移ると約束する．結局原点を 2 周してもとの点に帰ることになる．

次の関数の Riemann 面を作り，切断の入れ方と切断をまたぐ時の葉の移り変わりの様子を説明せよ．

(1) $w = z^{1/3}$　　(2) $w = (z-1)^{1/2}$　　(3) $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$　　(4) $w = \log z$

5．(切断と積分 1)　次の積分

$$I = \int_0^\infty f(x)dx$$

を求めるために次の積分

$$J = \oint f(z)\ln z\,dz = J_+ + J_- + J_0 + J_\infty$$

を考える．積分路は図の通りとする．ここでは切断に実軸の正の部分を取る．

(1) $\epsilon \to 0\,(z \to 0)$ および $r \to \infty\,(z \to \infty)$ で

$$|zf(z)\ln z| \to 0$$

ならば，$J_0, J_\infty \to 0$ を示せ．

(2) 分枝を適当にとると

$$J_+ = \int_0^\infty f(x)\ln x dx,\ J_- = \int_\infty^0 f(x)(\ln x + 2\pi i)dx$$

と書けること示せ．また (1) の条件がみたされていれば，

$$J = -2\pi i I$$

がなりたつことを示せ．

(3) (1) の条件が満たされていれば

$$I = -\sum \mathrm{Res}[f(z)\ln z]$$

であることを示せ．またこの結果はどのように分枝をとっても変わらないことを示せ．

(4) この方法を用いて

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$$

を求めよ．

6. (切断と積分 2) 次の関数について以下の問いに答えよ．

$$f(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z}(0 < p < 1)$$

(1) $f(z)$ の極と分岐点を求めよ．

(2) 図のような積分路 $C = C_\epsilon + ab + C_r + b'a'$ を考える．ここでは切断に実軸の正の部分を取る．$\epsilon < 1 < r$ のとき

$$\oint_C f(z)dz$$

を求めよ．

(3) $\epsilon \to 0, r \to \infty$ の極限を取ることにより

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

を証明せよ．