

解答上の注意

- 1) 答案用紙 3 枚, 計算用紙 1 枚
- 2) 答案用紙は裏面も使って良い. そのときは表に「裏へ」と明記すること.
- 3) 答案の並びは, 問題番号の並びと違っていてもよい. ただし問題番号を明記すること.
- 4) 導出過程を記述すること.
- 5) 持ち込み不可.

1. 次の問いに答えよ.

- (1) $z^3 = 1$ の根を全て求め, 複素平面上に図示せよ.
- (2) $z^n = 1$ の根は複素平面上でどのような幾何学的位置にあるか.
- (3) 以下の複素べき級数の収束半径を求めよ.

i)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ii)
$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$$

iii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

2. $f(z)$ を正則な複素関数とする. $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbf{R}$), $\operatorname{Re}f(z) = u(x, y)$, $\operatorname{Im}f(z) = v(x, y)$ とするとき以下の問いに答えよ.

(1) u, v はともに 2 次元の Laplace 方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

を満たすことを示せ.

(2) xy 平面 (複素平面) 上に u, v の等値線を描く. このとき u の等値線と v の等値線は直交することを示せ. (ヒント: 2 次元の勾配は $\operatorname{grad} = i\partial_x + j\partial_y$. ここで i, j はそれぞれ x, y 方向の基本ベクトル.)

(3) 流れがある関数の勾配で記述できるとき, このような流れをポテンシャル流と呼ぶ. u を速度ポテンシャルとする 2 次元流は非発散であることを示せ.

(4) 次の複素関数の実部を速度ポテンシャルに持つ 2 次元流を考える. このとき

i) $f(z) = Ue^{-i\alpha z}$ は一様流をあらわすことを示せ ($U, \alpha \in \mathbf{R}$)

ii) $f(z) = m \ln z$ は原点からのわき出し流をあらわすことを示せ ($m \in \mathbf{R}$)

iii) $f(z) = -i\kappa \ln z$ は原点の周りを回る流れをあらわすことを示せ ($\kappa \in \mathbf{R}$)

iv) $f(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$ は xy 面を垂直に貫く半径 a の円筒を横切る流れをあらわすことを示せ ($U, a \in \mathbf{R}, a > 0$)

3. 以下の問いに答えよ .

(1) $z = a$ が関数 $f(z)$ の p 位の極のとき ,

$$(z = a \text{ における留数}) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} (z-a)^p f(z)$$

が成り立つことを示せ .

(2) $f(z) = P(z)/Q(z)$ で $P(z)$ が正則 , $Q(z)$ が $z = a$ で一位のゼロ点を持つならば

$$(z = a \text{ における留数}) = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

が成り立つことを示せ .

(3) 次の関数の極における留数を求めよ

i) $\frac{z^3 + 5}{z(z-1)^3}$

ii) $\frac{\cos z}{z^3}$

iii) $\frac{1}{\sin z}$

iv) $\frac{z^2 e^z}{1 + e^{2z}}$

4. 次の実積分を計算せよ .

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{a + b \cos \theta} d\theta \quad (0 \leq b \leq a)$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + a^4} dx \quad (a > 0)$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx \quad (m, a > 0)$$

$$(4) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

5. 以下の (1) ~ (4) の関数についてそれぞれ分枝, 分岐点, 分岐点の位数を求めよ . それぞれ Riemann 面を作り, 切断の入れ方と切断をまたぐ時の葉の移り変わりの様子を説明せよ .

$$(1) w = z^{1/3}$$

$$(2) w = (z - 1)^{1/2}$$

$$(3) w = \sqrt{(z - a)(z - b)}$$

$$(4) w = \log z$$

6. 問題を作りこれに解答せよ . 問題文および解答をはっきり区別して記述すること .