2.1 ベクトルと基底

方向と大きさを持つ量を **ベクトル** (vector) と呼ぶ. 以下ではベクトルを太文字のアルファベット $\boldsymbol{a}$ 等として表す. ベクトルは複数の数の組合せとしても表現することができる. ベクトルを構成する個々の数をベクトルの**成分** (component) と呼び, $a_1, a_2, \cdots$ 等と表す. n 個の成分からなる n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ の大きさ $|\boldsymbol{a}|$ と, 2 つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の **内積** (inner product) は, それぞれ以下のように定義される.

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

ここで b_i はベクトル $\boldsymbol{b}$ の成分である.

(1) 以下が成り立つことを確認せよ. ただし $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_i = a_i + b_i$ とする.

1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

2) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$

3) $\boldsymbol{a} \cdot \alpha \boldsymbol{b} = \alpha \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

(2) r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立であり, $r+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}$ が 1 次従属である場合, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_j$ の 1 次結合で表されることを示せ.

(3) 1 次独立な 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ から, 正規直交系 (大きさが 1 で互いに直交するベクトル) を作れ.

(4) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (-2, -1, 2), \boldsymbol{b} = (-4, -2, 4), \boldsymbol{c} = (3, 1, 0)$, およびその一次結合から作られるベクトルからなるベクトル空間 $\boldsymbol{V}$ の次元 (基底の数) と正規直交基底を求めよ.

2.2 座標軸の回転

3 次元直交座標系における回転について考える．回転とは次の 2 つのいずれかの操作を意味する

i) 座標軸は固定し, 原点のまわりに空間内の点を回転させる,

ii) 点は固定し，座標軸を原点の周りに回転させる.

ここでは ii) の座標軸の回転を考えることにする.

回転前の 3 つの直交座標軸 $1, 2, 3$ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, 回転後 (すべてプライム $'$ をつけて表す) の直交座標軸 $1', 2', 3'$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ で表す．このとき位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ はそれぞれの座標系において，

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = x'_1\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\boldsymbol{e}'_2 + x'_3\boldsymbol{e}'_3$$

と表される.

(1) このとき旧座標から新座標への変換は行列を用いて以下の様に書けることを示せ. この行列は回転行列と呼ばれる.

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{但し } a_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

ここで $\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ はベクトル $\boldsymbol{e}'_i$ と $\boldsymbol{e}_j$ の内積を表す.

(2) 次の各軸の周りに角度 θ それぞれ右ねじ回転するときの回転行列 $R_3(\theta)$, $R_2(\theta)$，$R_1(\theta)$ の表式をそれぞれ求めよ.

1) 第 3 軸　　2) 第 2 軸　　3) 第 1 軸

(3) 回転行列 $R_3(\theta)$，$R_2(\theta)$，$R_1(\theta)$ は互いに可換か.

2.3 置換と互換

1 から n までの自然数を元とする集合における 1 対 1 変換 σ を考える．$\sigma(1) = i_1, \sigma(2) = i_2, \cdots, \sigma(n) = i_n$ である時 ($i_1, i_2, \cdots, i_n$ は相異なる n 以下の自然数),

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

と記す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) このような **置換** は $n!$ 通りあることを示せ.

(2) 任意の置換は何個かの **互換** (2 つの数の入れ替え) の積として表される. 互換の個数が偶数か奇数かは初めに与えられた置換によって決まり, その表し方にはよらないことを示せ. (ヒント: n 変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の差積 $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ を導入する)

(3) σ が偶数個の互換の積で表される置換を偶置換，奇数個の互換の積で表される置換を奇置換とよぶ．置換 σ の符合 sgn σ は σ が偶置換の時 $+1$，奇置換の時 -1 と定義する.

1) $n = 3$ のときの置換をすべて列挙し，それぞれの符合を求めよ．

2) 置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

の符合を求めよ.

2.4　行列式の多重線形性と交代性

$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij}) = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ (ここで $\boldsymbol{a}_i$ は n 次元列ベクトル) の行列式 $\det A$ は以下のように定義される.

$$\det A = \sum_{\forall \sigma} \mathrm{sgn}\, \sigma \; a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

このとき行列式には以下の性質が成り立つことを証明せよ.

(1) k を定数とする時,

$$\det(\boldsymbol{a}_1 \cdots k\boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_n) = k \det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_n)$$

(2)

$$\det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}'_i \cdots \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}'_i \cdots \boldsymbol{a}_n)$$

(3)

$$\det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_j \cdots \boldsymbol{a}_i \cdots \boldsymbol{a}_n)$$

(4) B をもう一つの $n \times n$ 行列とする時,

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

2.5 連立 1 次方程式

(1) 2 元 1 次連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

が自明でない解をもつ場合, x_1, x_2 は

$$x_1 = \frac{\det \boldsymbol{D}_1}{\det \boldsymbol{D}}, \quad x_2 = \frac{\det \boldsymbol{D}_2}{\det \boldsymbol{D}},$$

と表されることを示せ. ここで $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$ はそれぞれ以下の行列である.

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}.$$

(2) 同様に 3 元 1 次連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

の自明でない解 (x_1, x_2, x_3) を行列式を用いて表せ.

(3) n 元連立 1 次方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c},$$

の解である列ベクトル x の第 k 成分は, 行列式を用いて

$$x_k = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} D_k, \quad D_k = |(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \cdots \boldsymbol{a}_n)|$$

と表される (クラメルの公式). これを用いて次の連立方程式を解け.

$$1) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 3 \end{cases} \qquad 2) \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

2.6 行列の基本変形と逆行列

行列の行と列に関する以下の操作は, それぞれ右および左からある行列をかけることで実行できる.

i) 1 つの行 (列) を定数倍する.

ii) 1 つの行 (列) の定数倍を他の行 (列) に加える.

iii) 1 つの行 (列) を他の行 (列) と入れ換える.

この操作を行列の **基本変形** と呼び, これを実行する行列を **基本行列** と呼ぶ.

(1) 2 次の正方行列の基本行列をすべて挙げよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ を n 次正則行列, $\boldsymbol{E}_n$ を n 次単位行列とする. n 次行列に対する行基本変形から構成されるこのとき $n \times 2n$ 行列 $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n)$ の $\boldsymbol{A}$ の部分を単位行列に変換する行基本変形 $\boldsymbol{P}$ を, 行列 $\boldsymbol{E}_n$ の部分に対しても作用させせることにより, 逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めることができる (ガウス–ジョルダン法).

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n) \to (\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{PE}_n) = (\boldsymbol{E}_n|\boldsymbol{PE}_n) = (\boldsymbol{E}_n|\boldsymbol{A}^{-1})$$

これを用いて次の行列の逆行列を求めよ. ただし $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ とする.

$$1)\quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\quad \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 3)\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $m \times n$ 行列 A を行基本変形 P により

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

と変形できたとする. ここで E_r は r 次の単位行列, $\boldsymbol{B}$ は $r \times (n-r)$ 行列, $\boldsymbol{O}$ は零行列である. ここで r を行列 A の **階数** (rank) と呼び, $r = \mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}$ と表す. このとき n 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対する連立一次方程式

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{c},$$

が自明でない解を持つための条件は, rank $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{c}) = \mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}$ であることを示せ.