補遺: テイラーの定理

A.1 はじめに

本稿では**テイラーの定理**, すなわち閉区間 $[a, b]$ において n 階まで連続な導関数を持ち, 開区間 (a, b) で $n+1$ 回微分可能な関数 $f(x)$ において, $a < c < b$ である c に対し,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \tag{A.1}$$

が成り立つことを調べる.

(A.1) を無限回微分可能な連続関数に応用した**テイラー級数**および**マクローリン級数**は理工学のさまざまな場面で頻繁に使用される. 大学初年度の微積分学の講義で行われる, 連続や極限, 微分可能といった概念についての厳密な解説は, 理工学を専修する者にとっては (A.1) を理解するために必要なものと言ってもよいだろう.

しかしながら, 現実は (A.1) に到達する前に数学独特の言い回し, 定義と定理の洪水に飲みこまれ (A.1) は一体何であるのか, どのような意味があるのか理解することなく, 学習を終えてしまうようである.

(A.1) 式はもちろん微積分の諸定理によって裏付けられる定理である. しかし (A.1) は同時に関数の近似または補間法, すなわち「わかっている関数の値をもちいてわかってない関数の値を得る方法」と関係がある. 本稿ではまず関数の補間法について解説し, (A.1) 式の形はどこから得られるのかを示す. 次に (A.1) 式の証明に必要な諸定理を解説し, (A.1) 式の証明とテイラー展開およびマクローリン展開の導出を行う.

A.2　関数の補間

n 次の多項式 $y = f(x)$ に対し, x の $n+1$ 個の値 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ に対する y の値 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$ が与えられたとする. なお a_i は,

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + h, \\ a_3 = a_1 + 2h, \\ \cdots \\ a_{n+1} = a_1 + nh, \end{cases}$$

と等間隔に与えられているとする. このとき $b_{n+1} = f(a_{n+1})$ を他の a_i, b_i を用いて表すことを考えよう.

まず関数 $f(x)$ と h を用いて階差 Δ を以下のように定義しておく.

$$\begin{cases} \Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \\ \Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x), \\ \cdots \\ \Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)). \end{cases}$$

なお階差と微分には以下の関係がある.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x)}{h}.$$

関数 $f(x)$ とその $n+1$ 個の点から得られる k 次の階差は $n+1-k$ 個である. たとえば 1 次の階差は

$$\Delta f(a_1), \Delta f(a_2), \Delta f(a_3), \cdots, \Delta f(a_n)$$

であり, n 次の階差は

$$\Delta^n f(a_1)$$

ただ 1 つである. これらの階差どうしの関係は逆三角形状に並べると理解しやすい. 逆三角形状に並べた階差どうしの関係から, $b_{n+1} = f(a_{n+1})$ は階差 $\Delta^k f(a_1)$ を用いて以下のように表される.

$$f(a_{n+1}) = f(a_1) + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \Delta f(a_1) + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \Delta^2 f(a_1) + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \Delta^n f(a_1). \quad \text{(A.2)}$$

ここで $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ は n 個の中から k 個の物を互いに区別することなく取り出す場合の数である. $x = a_1$ としてより一般的な表現にすると,

$$f(x+nh) = f(x) + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \Delta f(x) + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \Delta^2 f(x) + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \Delta^n f(x), \quad \text{(A.3)}$$

となる.

$h \to 0$ の場合

(A.3) 式において, nh を一定にして n を十分大きくする場合を考える. これは a_1 と a_{n+1} の間に非常に多くの点をとることに対応する. ここで $h' \equiv nh$ を用いることにすると, $h = h'/n$ と与えられる.

(A.3) 式右辺の各項の表現は, h', h を用いて以下のように表される.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \varDelta^m f(x) &= \frac{n!}{m!(n-m)!}\varDelta^m f(x) \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\varDelta^m f(x) \\
&= \frac{\frac{h'}{h}\left(\frac{h'}{h}-1\right)\cdots\left(\frac{h'}{h}-m+1\right)}{m!}\varDelta^m f(x) \\
&= \frac{h'(h'-h)(h'-2h)\cdots(h'-(m-1)h)}{m!}\frac{\varDelta^m f(x)}{h^m}.
\end{aligned}$$

ここで nh を一定にして n を十分大きくする場合を考える.

$$\lim_{h\to 0} h'(h'-h)(h'-2h)\cdots(h'-(m-1)h) = h'^m,$$

である. さらに階差と微分との関係の類推から, $h \to 0$ の極限では,

$$\frac{\varDelta^m f(x)}{h^m} \to f^{(m)}(x),$$

となることが予想される. したがって,

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \varDelta^m f(x) \to \frac{h'^m}{m!} f^{(m)}(x).$$

これより補間式 (A.3) は h を十分小さくとると,

$$f(x+h') = f(x) + h'f'(x) + \frac{h'^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{h'^n}{n!}f^{(n)}(x) \qquad \text{(A.4)}$$

となることが予想される. この式はテイラーの定理 (A.1) と右辺最後の項を除き同じ形となっていることがわかる.

A.3 ロルの定理・平均値の定理

(A.4) 式が n 次の多項式だけでなく n 階まで連続な導関数を持ち, $n+1$ 階微分可能なあらゆる関数に対しで成り立つことを示すためには, ロルの定理, およびその変形である平均値の定理を理解しておく必要がある.

ロルの定理 関数 $f(x)$ が有限の閉区間 $[a,b]$ において連続で $f(a)=f(b)$ であり, 開区間 (a,b) において微分可能であるとする. このとき

$$f'(c)=0,$$

となるような点 c が (a,b) に存在する.

証明 連続関数は $[a,b]$ で最大値 $f(c)$ と最小値 $f(c')$ を持つとしよう.

$$f(c') \le f(a) = f(b) \le f(c).$$

ここで全て等号が成り立つ場合,

$$f(x)=f(a)=f(b),$$

である. したがって $[a,b]$ のいかなる点において,

$$f'(c)=0,$$

である.

次に不等号が存在する場合, たとえば

$$f(a)=f(b)<f(c),$$

を考える. このとき c における微分係数を求める. $x>c$ では $x-c>0, f(x)-f(c)\le 0$ なので,

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(x)}{x-c}\le 0,$$

$x<c$ では $x-c<0, f(x)-f(c)\le 0$ なので,

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(x)}{x-c}\ge 0,$$

両者は一致するはずなので,

$$f'(c)=0,$$

となる.

$$f(c')\le f(a)=f(b)$$

の場合は同様に考えて $f'(c')=0$ が得られる.

平均値の定理 関数 $f(x)$ が有限の閉区間 $[a,b]$ において連続であり, 開区間 (a,b) において微分可能であるとする. このとき

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{A.5}$$

となるような点 c が (a,b) に存在する.

証明 以下のような関数 $F(x)$ を導入する.

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

このとき明らかに $F(a) = F(b)$ である. また $F(x)$ は有限の閉区間 $[a,b]$ において連続であり, 開区間 (a,b) において微分可能である. これよりロルの定理から,

$$F'(c) = 0,$$

となる点 c が (a,b) に存在する. このとき

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

なので,

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

が得られる.

平均値の定理 (A.5) を書き直すと,

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a), \quad (a < c < b)$$

である. これは (A.1) を右辺第 2 項までとったものと同じ式である.

A.4 テイラーの定理

いよいよテイラーの定理の証明に入る. 証明される式の形は (A.4) 式および平均値の定理 (A.5) から推定することができるだろう.

テイラーの定理 閉区間 $[a,b]$ において n 階まで連続な導関数を持ち, 開区間 (a,b) で $n+1$ 回微分可能な関数 $f(x)$ において, $a<c<b$ である c に対し,

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$

が成り立つ.

証明 関数 $\varphi(x)$ を以下のようにおく.

$$\varphi(x)=-f(b)+f(x)+f'(x)(b-x)+\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n+K\frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}.$$

ここで K は

$$K=f(b)-\left\{f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right\}$$

とする. このとき $\varphi(x)$ は $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能である. さらに

$$\varphi(a)=\varphi(b)=0,$$

である. これよりロルの定理から

$$\varphi'(c)=0,$$

となる c が (a,b) に存在する. $\varphi'(x)$ を求めてみると,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x)+\{-f'(x)+f''(x)(b-x)\}+\left\{-f''(x)(b-x)+\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2\right\}\\ &\quad+\cdots+\left\{-\frac{f^{(n)}(x)}{n-1!}(b-x)^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n\right\}\\ &\quad-(n+1)K\frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}\\ &= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n-(n+1)K\frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}.\end{aligned}$$

となる. $\varphi'(c)=0$ より,

$$K=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$

が得られる. これを K の定義式に戻すと証明されるべき式が得られる.

A.5 テイラー展開・マクローリン展開

テイラーの定理 (A.1) から様々な表式が得られる. $c = a + \theta(b - a) \quad (0 < \theta < 1)$ とすると,

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(b-a))}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \quad (0<\theta<1). \end{aligned}$$

ここで $a = x$ とくと**テイラー展開**が得られる.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad (0<\theta<1). \end{aligned} \tag{A.6}$$

テイラー展開の特別な場合として $a = 0$ とおいた**マクローリン展開**がある.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0<\theta<1). \end{aligned} \tag{A.7}$$

なお, それぞれの式の右辺最後の項は**剰余項**と呼ばれる.

A.6 テイラー級数・マクローリン級数

(A.6), (A.7) の展開を用いてもとの関数 $f(x)$ を近似する場合, n をできるだけ大きくとると近似の精度が向上することが期待される. ここで (A.6) の剰余項

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad (0<\theta<1) \tag{A.8}$$

が十分大きい n に対し,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0,$$

であるならば, テイラー展開 (A.6) は n を大きくとればとるほどよりよい近似式となる. このとき n を ∞ までとった展開式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots, \tag{A.9}$$

を**テイラー級数**と呼ぶ. 同様に (A.7) から, **マクローリン級数**

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots, \tag{A.10}$$

が得られる.

以下にマクローリン級数の例をいくつか挙げる.

(1) $f(x) = e^x$ の場合. n 回微分は

$$f^{(n)}(x) = e^x,$$

である. よって剰余 R_n は,

$$R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta x)}{n!}x^n = \frac{x^n e^{a+\theta x}}{n!} < \frac{x^n e^{a+x}}{n!}$$

ここで $x < m$ となるような整数 m を用意すると,

$$\frac{f^{(n)}(a+\theta x)}{n!}x^n < \frac{x^m}{(m-1)!}\cdot\frac{x}{m}\cdot\frac{x}{m+1}\cdots\frac{x}{n}\cdot e^{a+x} < \frac{x^m}{(m-1)!}\cdot\left(\frac{x}{m}\right)^{n-m}\cdot e^{a+x}.$$

$n\to\infty$ とすると $x<m$ なので右辺は 0 に収束する. これより

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0,$$

である. このときのマクローリン級数は

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots. \tag{A.11}$$

(2) $f(x) = \cos x$ の場合. n 回微分は

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}).$$

また一般に

$$\left| \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \right| \leq \frac{|x^n|}{n!} |f^{(n)}(\theta x)|,$$

である. $f(x) = \cos x$ の場合は

$$|f^{(n)}(\theta x)| \leq 1, \quad \frac{|x^n|}{n!} |f^{(n)}(\theta x)| \leq \frac{|x^n|}{n!},$$

である. ここで先の $f(x) = e^x$ の場合と同様に

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x^n|}{n!} = 0,$$

が証明できる. これより $f(x) = \cos x$ のテイラー展開における剰余 R_n は $n \to \infty$ で 0 に収束する.

このときのマクローリン級数は以下のようになる.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{A.12}$$

(3) $f(x) = \sin x$ の場合.

$f(x) = \cos x$ の場合と同様に,

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{A.13}$$

参考文献

遠山啓, 1970: 「微分と積分, その思想と方法」, 日本評論社.

吹田信之, 進保経彦, 1987: 「理工系の微分積分学」, 学術図書出版社.

和達三樹, 1988: 「微分積分」, 理工系の数学入門コース 1, 岩波書店.