4.1 ベクトルの内積と外積

方向と大きさを持つ量を **ベクトル** (vector) と呼ぶ. 以下ではベクトルを太文字のアルファベット $\boldsymbol{a}$ 等として表し, 特に注意のない限り右手系の 3 次元ベクトルを考える. ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の成分をそれぞれ $a_i, b_i (i = 1 \sim 3)$ とすると, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**内積** (inner product, scalar product) と **外積** (outer product, vector product) は, 添字について**アインシュタインの規約**[1]に従うとするとそれぞれ以下のように与えられる.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i b_i = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\theta, \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (\varepsilon_{1ij} a_i b_j, \varepsilon_{2ij} a_i b_j, \varepsilon_{3ij} a_i b_j) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta \cdot \boldsymbol{e}_k. \tag{4.2}$$

ここで θ はベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角, $\boldsymbol{e}_k$ は ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ によって張られる平面に垂直なベクトルで, その向きは $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へと右まわりに進むねじの方向にとる. ε_{ijk} は**エディントンのイプシロン**で, 以下のように定義される.

i	j	k	ε_{ijk}
1	2	3	1
2	3	1	1
3	1	2	1
1	3	2	-1
3	2	1	-1
2	1	3	-1
			0

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ となること示せ.

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ となることを示せ (スカラー 3 重積).

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ となることを示せ (ベクトル 3 重積).

(4) スカラー 3 重積とベクトル 3 重積の幾何学的な意味を説明せよ.

[1]同じ添字が 2 つ以上現れた場合にはその添字について和をとる, というもの.

4.2 ローレンツ力

電場 $\boldsymbol{E}$, 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ 中を速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する電荷 q を持つ荷電粒子は, 以下の式で与えられる力 $\boldsymbol{F}$ を受ける.

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

(1) $\boldsymbol{E} = 0$, $\boldsymbol{v} = (u, v, 0)$, $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ とする. このとき荷電粒子の運動方程式を求めよ.

(2) $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ とする. 速度 $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/B^2$ で動く座標系から荷電粒子の運動を見た場合, $\boldsymbol{F}$ から電場が消えることを示せ.

(3) 上記 (2) の場合において $\boldsymbol{E} = (0, E, 0), \boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ のとき, 速度 $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/B^2$ の大きさと向きを示せ.

4.3 ベクトルの微分

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ とする. このときベクトル $\boldsymbol{a}$ の導関数は以下のように与えられる.

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+h) - \boldsymbol{a}(t)}{h} = \left(\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \frac{da_3}{dt}\right).$$

このとき以下が成り立つことを示せ.

(1)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}.$$

(2)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

(3)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

4.4 中心力場の運動

ある点 (たとえば原点) からの距離のみによって決まる力を中心力と呼ぶ. 中心力 $\boldsymbol{F}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて一般に

$$\boldsymbol{F} = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と表される. ここで $f(r)$ は r のみによって決まる関数である. このとき中心力の場の中で運動する物体について, $\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ は時間によらす一定であることと, 運動はある 1 つの平面内に限定されることを示せ.

4.5 回転系の運動方程式

静止している直交座標系に対し, 第 3 軸を軸として一定の角速度 ω で回転する座標系の運動方程式を以下の手順で求めよ.

(1) 静止している直交座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, 回転する座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ とする. このとき

$$\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt} = 0,$$

であることを示せ. ただし $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}'_3$ である.

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x'\boldsymbol{e}'_1 + y'\boldsymbol{e}'_2 + z'\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{r}'$ について以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} &= \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}', \\ \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} &= \frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}').\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} &= \frac{d'x'}{dt}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'y'}{dt}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'z'}{dt}\boldsymbol{e}'_3, \\ \frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{d'^2x'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'^2y'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'^2z'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_3\end{aligned}$$

と表される回転系の時間微分である.

(3) 静止系での運動方程式

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

を回転系の表現に変換せよ.