5.1 スカラーの勾配

座標 x, y, z の関数 $f = f(x, y, z)$ が与えられた場合, 点 (x, y, z) における f の**勾配** (gradient) は以下のように定義される.

$$\text{grad } f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z. \tag{5.1}$$

ここで $\boldsymbol{e}_i$ は i 方向の単位ベクトルである. grad はグラジュエント, もしくはグラッドと発音する. (5.1) はハミルトンの演算子

$$\nabla \equiv \boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

を用いると

$$\text{grad } f = \nabla f$$

と表される.

(1) 固定点 P から一定の微小距離 dr だけ離れた点 Q がある. 点 P から Q へ移動した際の関数 f の変化が最大となるのは, ベクトル PQ が点 P における ∇f に平行な場合であることを示せ (ヒント: ベクトル PQ を $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x dx + \boldsymbol{e}_y dy + \boldsymbol{e}_z dz$ としてみよ).

(2) ∇f は $f =$ 一定 の面 (これを等位面と呼ぶ) に垂直であることを示せ.

(3) g を f とは異なるスカラー関数とする場合, 以下の式が成り立つことを示せ. ただし α, β はスカラーとする.

$$\text{(i)} \quad \nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha\nabla f + \beta\nabla g \qquad \text{(ii)} \quad \nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$$

$$\text{(iii)} \quad \nabla\left(\frac{g}{f}\right) = \frac{f\nabla g - g\nabla f}{f^2} \qquad \text{(iv)} \quad \nabla f(g) = \frac{\partial f}{\partial g}\nabla g$$

5.2 スカラー勾配の具体例・方向微分

(1) 以下の 2 次元直交直線座標系 (x, y) におけるスカラー関数 $f = f(x, y)$ について, grad f を求め, 複数の $f =$ 一定 の等高線を図示せよ. ただし, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする.

$$\text{(i)} \quad f = \frac{1}{r} \quad \text{(ii)} \quad f = \frac{y^2}{r} \quad \text{(iii)} \quad f = xy \quad \text{(iv)} \quad f = 4x^2 + 9y^2$$

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ について, 以下の式が成り立つことを示せ. ただし $r = |\boldsymbol{r}|$ である.

$$\text{(i)} \quad \nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad \text{(ii)} \quad \nabla f(r) = f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad \text{(iii)} \quad \nabla(\frac{1}{r}) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \quad \text{(iv)} \quad \nabla \ln r = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$$

(3) 3 次元空間内の点 P(x, y, z) とそれに隣接する点 Q$(x + dx, y + dy, z + dz)$ を置く. PQ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{u} = (l, m, n)$ とするとき, 以下の極限値

$$\frac{\partial f}{\partial u} \equiv \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(x + l\Delta s, y + m\Delta s, z + n\Delta s) - f(x, y, z)}{\Delta s}$$

を f の $\boldsymbol{u}$ 方向微分と呼ぶ. ここで Δs はベクトル PQ の長さである. このとき以下を証明せよ.

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \boldsymbol{u} \cdot \nabla f \quad \text{(ii)} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \leq |\nabla f|$$

5.3 ベクトルの発散

各成分が座標の関数となっているベクトル

$$\boldsymbol{A} = a_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x + a_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y + a_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

を考える (このとき $\boldsymbol{A}$ をベクトル場と呼ぶ). $\boldsymbol{A}$ の**発散** (divergence, ダイバージェンス) は以下のように定義される.

$$\text{div}\ \boldsymbol{A} \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{5.2}$$

(1) div $\boldsymbol{A} = \nabla\cdot\boldsymbol{A}$ と表されることを示せ.

(2) $\varphi = \varphi(x,y,z)$ をスカラー関数とすると,

$$\text{div}\cdot(\varphi\boldsymbol{A}) = (\text{grad}\ \varphi)\cdot\boldsymbol{A} + \varphi\text{div}\cdot\boldsymbol{A}$$

となることを示せ.

(3) スカラー関数 φ に対し,

$$\text{div}\ (\text{grad}\ \varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

となることを示せ.

なお, div (grad φ) は $\nabla\cdot(\nabla\varphi)$, $\nabla^2\varphi$ 等とも表す. とくに ∇^2 を記号 Δ で表し, これをラプラス演算子と呼ぶ.

5.4 ベクトルの回転

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対し, その**回転** (rotation, ローテーション, ロート) は以下のように定義される.

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} \equiv \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z. \tag{5.3}$$

行列式の形で書けば,

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

と表される.

(1) rot $\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ と表されることを示せ.

(2) rot$\boldsymbol{A}$ の第 i 成分をエディィントンのイプシロン ε_{ijk} を用いて表せ.

(3) スカラー関数 φ に対し rot (grad φ) $= 0$ を証明せよ.

(4) div (rot $\boldsymbol{A}$) $= 0$ を証明せよ.

(5) rot $(\varphi\boldsymbol{A}) =$ (grad $\varphi) \times \boldsymbol{A} + \varphi$rot $\boldsymbol{A}$ を証明せよ.

5.5 発散・回転の物理的解釈

(1) 3 次元空間内の**定常な流れ**を考える. このとき空間内の各点の速度場は $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ で与えられる. 流れ場中に空間内のある一点 P(x, y, z) を頂点にもち, 角辺が x, y, z 軸に平行でその長さが (dx, dy, dz) である微小直方体を置く. この直方体から単位時間に流出する流体の総体積は, 近似的に

$$(\text{div}\ \boldsymbol{v})_{\text{P}} \times dxdydz$$

と表されることを示せ. ここで $(\text{div}\ \boldsymbol{v})_{\text{P}}$ は点 P における $\boldsymbol{v}$ の発散を表す.

(2) 原点を通る固定軸の周りに一定の角速度 Ω で剛体が回転しているとする. 剛体の任意の点における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする. $\boldsymbol{r}$ における速度を $\boldsymbol{v}$ とするとき,

(i) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ となることを示せ.

(ii) rot $\boldsymbol{v}$ を計算せよ.

ただし $\boldsymbol{\Omega}$ は大きさが Ω の角速度ベクトルである.

(3) 滑らかな曲線 C: $\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y + z(t)\boldsymbol{e}_z$ (t はパラメータ) 上における接線ベクトルがベクトル $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ と平行であるとき, C をベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ の**流線** (streamline) と呼ぶ. このとき C 上の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は以下の方程式を満たす.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{A}.$$

以下のようなベクトル場が与えられた場合, それぞれの流線を図示し, 発散と回転を求めよ. ただし α は定数とする.

(i) $\boldsymbol{A} = \alpha(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y), \alpha < 0$

(ii) $\boldsymbol{A} = \alpha(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y), \alpha > 0$

(iii) $\boldsymbol{A} = \alpha(y\boldsymbol{e}_x - x\boldsymbol{e}_y), \alpha > 0$

(iv) $\boldsymbol{A} = \alpha(y\boldsymbol{e}_x - x\boldsymbol{e}_y), \alpha < 0$

5.6 ∇ を含む演算

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$ はスカラー関数, $\boldsymbol{A}(x,y,z)$, $\boldsymbol{B}(x,y,z)$ はベクトル関数とする.

(1) $\nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$

(2) $\nabla \cdot (\nabla \varphi \times \nabla \psi) = 0$

(3) $\nabla \cdot \times (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$

(4) $\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} - (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A}$

(5) $\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = -(\nabla \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}$

(6) $\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}$

(7) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$

5.7 波動方程式

x, y, z, t のベクトル関数 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ が以下の式を満たすとする.

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

だたし c は定数とする. このとき $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ は以下の微分方程式 (波動方程式) を満たすことを示せ.

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \boldsymbol{E}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \boldsymbol{H}.$$

5.8 非圧縮性流体の運動

密度一定の理想流体の運動方程式と連続の式 (質量保存則) は, 以下の方程式で記述される.

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \nabla(\frac{p}{\rho}), \tag{5.4}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0. \tag{5.5}$$

ここで $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ は速度ベクトル, p, ρ はそれぞれ圧力と密度である.

(1) (5.4) の両辺の回転をとることで渦度方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{v}) = \nabla\times[\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})]$$

をもとめよ. ここで渦度とは $\nabla\times\boldsymbol{v}$ のことである.

(2) 渦無し流の場合 ($\nabla\times\boldsymbol{v} = 0$) の場合, スカラー関数 $\phi(x,y,z,t)$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi$$

と書けることを確かめよ (ϕ は速度ポテンシャルと呼ばれる).

(2) 渦無し流の場合, 上記のスカラー関数 ϕ は

$$\nabla^2\phi = 0$$

を満たすことを示せ (この式はラプラス方程式と呼ばれる).

(3) 定常な渦無し流の場合, 運動方程式から

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = 一定$$

が導かれることを示せ (ベルヌーイの方程式). ここで $v = |\boldsymbol{v}|$ である.