解答上の注意

1. 問題用紙 4 枚, 答案用紙 3 枚.
2. 答案用紙にはそれぞれ氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

ある点 (たとえば原点) からの距離のみによって決まる力を中心力と呼ぶ. 中心力 $\boldsymbol{F}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて一般に

$$\boldsymbol{F} = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と表される. ここで $f(r)$ は r のみによって決まる関数である. このとき中心力の場の中で運動する物体について, $\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ は時間によらず一定であることと, 運動はある 1 つの平面内に限定されることを示せ.

問題 2

静止している直交座標系に対し, 第 3 軸を軸として一定の角速度 ω で回転する座標系の運動方程式を以下の手順で求めよ.

(1) 静止している直交座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, 回転する座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ とする. このとき

$$\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt} = 0,$$

であることを示せ. ただし $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}'_3$ である.

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x'\boldsymbol{e}'_1 + y'\boldsymbol{e}'_2 + z'\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{r}'$ について以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} &= \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}', \\ \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} &= \frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'). \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} &= \frac{d'x'}{dt}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'y'}{dt}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'z'}{dt}\boldsymbol{e}'_3, \\ \frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{d'^2x'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'^2y'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'^2z'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_3 \end{aligned}$$

と表される回転系の時間微分である.

(3) 静止系での運動方程式

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

を回転系の表現に変換せよ.

問題 3

ベクトル場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ について以下の問いに答えよ.

(1) rot$\boldsymbol{A}$ の第 i 成分をエディントンのイプシロン ε_{ijk} を用いて表せ.

(2) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ を証明せよ.

(3) x, y, z, t のベクトル関数 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ が以下の式を満たすとする.

$$\text{div}\ \boldsymbol{E} = 0, \quad \text{div}\ \boldsymbol{H} = 0, \quad \text{rot}\ \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \text{rot}\ \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

だたし c は定数とする. このとき $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ は以下の微分方程式 (波動方程式) を満たすことを示せ.

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \boldsymbol{E}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \boldsymbol{H}.$$

問題 4

(1) スカラー場 φ の勾配ベクトル場 $\nabla\varphi$ の空間内の点 A から点 B にいたる経路 C 沿った線積分は

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

となることを示せ. ここで $\varphi(A)$ は点 A における ϕ の値を表す.

(2) $\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルとするとき, 面積分

$$\int_S \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を S が以下の場合について求めよ. ただし法線ベクトルの向きは S の内側から外側にとる.

(i) 単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(ii) 平面 $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm, 1$ で囲まれる立方体の表面.

問題 5

一階微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{A}$ が存在する空間内の閉曲面 S および S によって囲まれた領域 V を考える. このとき 領域 V として xyz 直線直交座標系における微小体積を考えることにより, ガウスの定理

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV$$

を証明せよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ が存在する空間内の閉曲線 C および C によって囲まれた曲面 S を考える. 曲面 S として xyz 直線直交座標系における xy 平面に平行な面要素を考えることにより, ストークスの定理

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

が成り立つことを示せ. ただし法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは C の正方向 (C に囲まれた領域を右側に見る向き) に進む右螺の進む向きにとる.

問題 6

座標 $\boldsymbol{r}$ を直交直線座標 (x,y,z) に代わる 3 つの変数 (u,v,w) で表す場合を考える. u,v,w はともに x,y,z の関数である. u 曲線とは, v,w を固定して u を変化させた時に座標 $\boldsymbol{r}$ が描く軌跡のことを言う. その接ベクトル $\boldsymbol{r}_u$ は次式で与えられる

$$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{e}_z$$

v,w 曲線およびその接ベクトル $\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_w$ は同様に定義される.

(1) 円筒座標と球座標についてそれぞれの接ベクトルを全て求めよ

(2) 円筒座標と球座標について, 各方向のスケール因子 (接ベクトルの大きさ) を求めよ.

(3) 円筒座標と球座標はともに直交座標系であることを示せ.