複素解析

解析学は微分と積分を主題にした数学のことである．学部 1 年までは実数関数についての微分積分学を学んできた. 実数関数を複素数上で定義された複素数値をもつ関数に拡張したものが複素関数である. 複素関数を利用した微分と積分からなる数学を複素解析と呼ぶ. 複素関数論とも言葉もよく用いられる. これは複素解析と同義と思ってよい.

ある複素数 z は 2 つの実数 x, y により $z = x + iy$ とあらわされる (i は虚数単位). したがって 1 つの複素数は 2 次元のベクトル (x, y) とみなすことができる. そのため複素解析と 2 次元のベクトル解析とは密接な関連がある. 実際に, 複素積分の定義には線積分の概念を使うし, 複素解析の根幹をなす定理群はストークスの定理の応用として導くことができる.

複素解析, 複素関数を導入するご利益は,「種々の積分を非常に簡単に求められる」ということに尽きる. その応用先は特殊関数論 (あらゆる物理分野をカバー), 流体力学 (特に 2 次元流問題), 弾性体力学等, 物理学と数学の広い範囲に及んでいる. 進んだ応用については後期の物理数学 II (演習) で学ぶことになる.

本演習では複素解析の基礎の習得を目標とする. 問題に入る前にその根幹となる 3 定理を抑え, 複素解析の全体像をおおまかに把握することを目指す. これらの詳細は物理数学 I の講義でも扱われているので, 以下の 3 定理を各人自学自習すること.

複素関数の導入

基本 3 定理の証明に必要な最低限の用語を解説する. 複素関数とは複素数 z を変数とする関数のことで, $w = f(z)$ 等として表す. z の動く範囲を $f(z)$ の **定義域**, そのときの w の動く範囲を **値域** と呼ぶ.

$z = x + iy$ とおけば, $f(z)$ は 2 つの実変数 x, y の関数となる. $f(z)$ の実部および虚部を表す実関数を $u(x, y), v(x, y)$ とおくと,

$$w = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

と表される.

複素関数の場合, 定義域も値域も複素平面上のある領域を示す. そのため複素関数を幾何学的に表すためには 2 つの複素平面が必要となる. z の動く複素平面を z **平面**, w 動く複素平面を w **平面** と呼ぶ. 一般に定義域を表す記号として D, 値域を表す記号として D' を用いる.

定理 1. コーシー・リーマンの定理

領域 D で定義された複素関数 $f(z)$ の実部および虚部を $u(x,y), v(x,y)$ とする ($z = x + iy, z \in D$). u, v が連続で，かつ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

を満たすならば，関数 $f(z)$ は領域 D 上で正則である．

解説 極限値

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

が h の取り方によらず一意に定まる時，$f(z)$ は $z = z_0$ で微分可能と言う．その極限値を $f(z)$ の $z = z_0$ における微分係数と言い，$f'(z_0)$ や $\dfrac{df}{dz}(z_0)$ 等と記す．領域 D の各点において $f(z)$ が微分可能な時，$f(z)$ は D 上で正則であるという．式 (1) はコーシー・リーマンの関係式と呼ばれ，複素関数の微分法の基礎となる式である．

証明 必要条件は次の方針で証明できる．$h = \Delta x, h = i\Delta y$ ($\Delta x, \Delta y \in \boldsymbol{R}$) とおき，それぞれ $\Delta x, \Delta y \to 0$ の極限をとって，$f'(z)$ を 2 通りにあらわす．2 通りの表式の実部と虚部が等しくなければならないと言うことから式 (1) が得られる (実際に確かめてみよ)．十分条件は以下のように示される．

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \Delta u + i\Delta v \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + O(|h|) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + O(|h|)
\end{aligned}$$

最後の変型に式 (1) を用いた．ここから

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}$$

と導関数が一意に定まる．

定理 2. コーシーの積分定理

関数 $f(z)$ が領域 D 上で正則で，単純閉曲線 C がその内部も含めてすべて D に 属するものとする．このとき

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{2}$$

である．

解説 複素関数の積分 (複素積分) は複素平面上の線積分として定義される．複素平面上に滑らかな曲線 C があるものとし，C の始点 A を z_0，終点 B を z_n とする．C を $n-1$ 個の点で分割する．分割点は A に近い物から順に $z_1, \cdots, z_{n-1}$ とする．

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

として，分割を十分細かくとった時の $f(\zeta_k)\Delta z_k$ (ζ_k は z_k と z_{k-1} の間の C 上の任意の点) の総和を $f(z)$ の複素積分と定義する．式で書けば

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

これは実積分に帰着させることができる．$f = u(x,y) + iv(x,y)$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k, \zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\{u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + i[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]\}$$

であるから

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) \tag{3}$$

とあらわされる．

証明 まず 2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{A} = A_1(x,y)\boldsymbol{i} - A_2(x,y)\boldsymbol{j}$ についてストークスの定理を書き下す．A_2 にはのちの便宜上 $-$ をつけた．C を xy 面上の閉曲線とするとストークスの定理は

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})_3\, dS$$

である．ここで $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}$ に注意すると，

$$\oint_C (A_1 dx - A_2 dy) = -\int_S \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial y}\, dx\, dy$$

となる．ここで $A_1 = u, A_2 =$ とおいて上式に代入し，コーシー・リーマンの関係式を用いると

$$\int_C (udx - vdy) = 0.$$

同様に $A_1 = v, A_2 = -u$ とおくと

$$\int_C (vdx + udy) = 0$$

となることが分かる．従って閉曲線 C に沿って，C 上およびその内部で正則な関数を積分した場合，積分値は 0 になることが示される．

コーシーの積分定理は，正則な複素関数の積分はその経路によらず始点と終点の値のみよって決まると言うことを意味している．これはベクトル解析の言葉でいえば関数の実部と虚部が渦無しのベクトル場を作っていることにあたる．

定理 3. コーシーの積分公式

関数 $f(z)$ が閉曲線 C の内部およびその上で正則で，C 内部の任意の点を a とするとき

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz \tag{4}$$

もし a が C の外にあれば

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz=0$$

である．

解説 この式は複素解析のもっとも重要な成果といってよい．ここから複素関数のテイラー展開，それを拡張したローラン展開が定義される．種々の積分が簡便に解けるようになるのもこの定理の応用である．

証明 準備として，まず次式を証明しておく．

$$\oint_\Gamma\frac{1}{z-a}dz=2\pi i \tag{5}$$

但し Γ は複素平面上で a を中心とする半径 ρ の円周である．$z-a=\rho e^{i\theta}$ と変数変換し，$dz=i\rho e^{i\theta}d\theta$ に注意すると，

$$\oint_\Gamma\frac{1}{z}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho e^{i\theta}}i\rho e^{i\theta}\,d\theta$$

右辺を整理すると

$$\text{右辺}=\int_0^{2\pi}id\theta=2\pi i$$

この値が円周の半径によらないことに注意．

コーシーの積分公式の証明に移ろう．$\dfrac{f(z)}{z-a}$ は点 a を除いて正則である．下図のように特異点を避けた積分路を考えることで，

$$\oint_{C+A-B+A'}\frac{f(z)}{z-a}dz=0$$

ここで B は a を反時計周りに回る積分路で，$-$ は逆に回ることを示す．

$$\oint_{C+A-B+A'}=\int_C+\int_{-B}+\int_A+\int_A'$$

$$\int_{-B}=-\int_B,\int_A'=-\int_A$$

であるから，結局

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_B \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

ここで $f(z) = f(z) - f(a) + f(a)$ と置くと，

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_B \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz + f(a)\oint_B \frac{1}{z-a}\,dz$$

右辺第 2 項は $2\pi i f(a)$ に等しい．第 1 項は $f(z)$ の正則性から任意の正実数 ε に対して十分小さな ρ をとれば $|f(z)-f(a)| < \varepsilon$ とでき，

$$\left|\oint_B \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}$$

$$\oint_B |dz| < 2\pi\varepsilon$$

である．ε は限り無く小さくとれるので，第 1 項の寄与は 0 である．従って，式 (3) を得る．a が C の外側の場合，C 内で $f(z)/(z-a)$ は正則だから定理の後半は明らか.

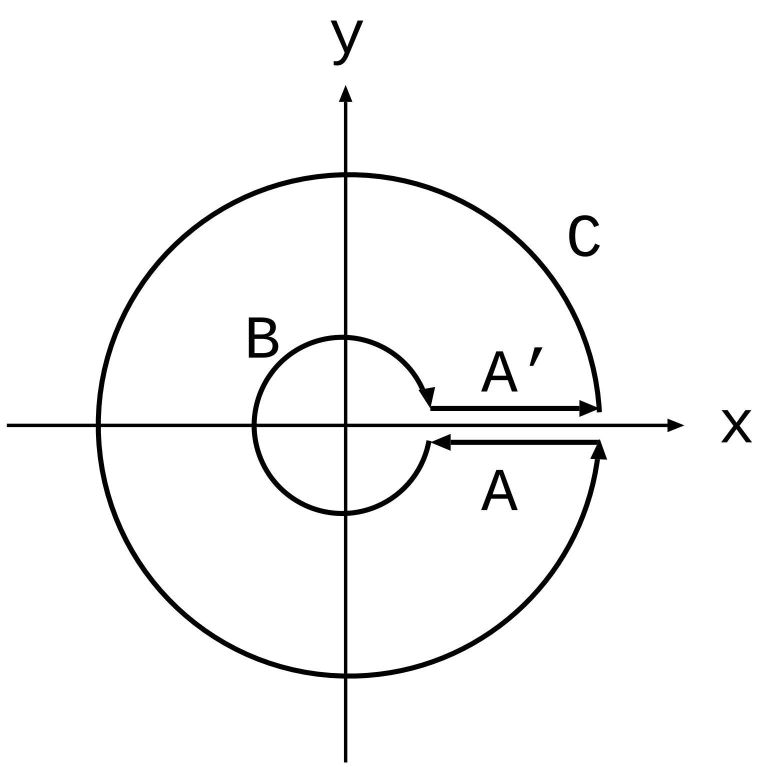

図 1: 積分路の取り方. 中心が $z = a$ の点. 便宜上実軸と虚軸の位置をずらしてある.

8.1 複素平面上の写像

以下の複素関数

$$w = f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad z \neq -\delta/\gamma)$$

を考える. ただし $z, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \boldsymbol{C}$ とする.

(1) この変換で z 平面上の異なる点は w 平面上の異なる点に対応する (1 対 1 対応する) ことを示せ.

(2) $\beta = -\overline{\alpha}, \delta = -\overline{\gamma}$ の場合, z 平面の原点を中心とする単位円 C は w 平面上の実軸に対応することを示せ.

(3) $\beta = -\overline{\alpha}, \delta = -\overline{\gamma}$, かつ Im $\dfrac{\alpha}{\gamma} < 0$ の場合, z 平面の原点を中心とする単位円 C の内部の点 $z(|z| < 1)$ は w 平面上の上半面の点 (Im $w > 0$) に対応することを示せ.

8.2 複素関数の極限と連続性

領域 D で定義された複素関数 $w = f(z)$ を考える. z が D 内を移動してある点 z_0 に近付くとき, w が w 平面内の点 w_0 に近付く場合, $f(z)$ は $z = z_0$ で**極限値** w_0 **を持つ**という. 数式では

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{8.1}$$

と表す. このとき z_0 **にどの方向から近付いても** w **は** w_0 **に近付く** (すなわち偏角によらない) ことが必要である.

複素関数 $w = f(z)$ が次の 3 つの条件 [1] $z = z_0$ で $f(z_0)$ が存在する, [2] $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ が存在する, [3] $w_0 = f(z_0)$ が成り立つ, を同時に満たすとき, $f(z)$ は $z = z_0$ で**連続**であるという

(1) 次の関数の極限値を求めよ.

(i) $\dfrac{1}{1+z^2} \quad (z \to i)$ (ii) $\dfrac{1+z^2}{1+iz} \quad (z \to i)$ (ii) $\dfrac{z}{\overline{z}} \quad (z \to 0)$

(2) 次の関数の $z = 0$ における連続性を調べよ.

(i) $f(x) = \begin{cases} (z+\overline{z})/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} (z+\overline{z})^2/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$

8.3 複素関数の微分

h を偏角一定の複素数とする. このとき極限値

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \tag{8.2}$$

が h の取り方によらず一意に定まる時, $f(z)$ は $z=z_0$ で**微分可能**と言う. その極限値を $f(z)$ の $z=z_0$ における微分係数と言い, $f'(z_0)$ や $\dfrac{df}{dz}(z_0)$ 等と記す. 領域 D の各点において $f(z)$ が微分可能な時, $f(z)$ は D 上で**正則**であるという.

(1) $f(z)=z^2$ とする. $h=\Delta x$ として式 (8.2) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(2) $f(z)=z^2$ とする. $h=i\Delta y$ として式 (8.2) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(3) $f(z)=z^2$ とする. $h=\Delta x+i\Delta y$, $\Delta y=k\Delta x$ として, 式 (8.2) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(4) $f(z)=z^n$ の場合, 式 (8.2) の極限は h の偏角の値によらず nz^{n-1} に収束することを示せ.

8.4　正則性 (1)

$z = x + iy,\ x, y \in \boldsymbol{R}$ とする. 次の関数 $f(z)$ はコーシー・リーマンの関係式を満たすかどうか調べよ.

(1) $f(z) = x^2 - y^2 - x + 5 + i(2x - 1)y$

(2) $f(z) = e^{-y}\,(\cos x + i\ \sin x)$

(3) $f(z) = z - \bar{z}$

(4) $f(z) = z + 1/z$

8.5 正則性 (2)

関数 $f(z)$ が正則でかつ次のいずれかが成り立つとき, $f(z)$ は定数であることを示せ.

(1) $f'(z) = 0$

(2) $\mathrm{Re} f(z) =$ 定数

(3) $\mathrm{Im} f(z) =$ 定数

(4) $f(z) =$ 実数, (または純虚数)

8.6 指数関数の仲間

$z \in \boldsymbol{C}$ とする. このとき指数関数 e^z, 三角関数 $\cos z, \sin z$ は次の無限級数で定義される. ただし $0! = 1$ とする.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\cos z$ と $\sin z$ を e^{iz}, e^{-iz} を用いて表せ.

(2) $z = e^w$ を満たす w を対数関数といい $w = \log z$ で表す. このとき $\log z$ は無限多価関数であることを示せ.

z の偏角 θ を $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲に限った時これを $\log z$ の**主値**と呼び $\mathrm{Log} z$ と記す (注: 主値を与える範囲として $-\pi \leq \theta \leq \pi$ をとることもある).

(3) $\cos^{-1} z, \sin^{-1} z$ をそれぞれ対数関数であらわし, 導関数を求めよ.