

## 9.1 正則関数の積分

- (1)  $f(z)$  を領域  $D$  において正則な関数 ( $z \in C$ ) とする.  $D$  内の 2 点  $P, Q$  を結び, かつ  $D$  内に含まれる任意の 2 つの曲線  $C_1, C_2$  に沿って点  $P$  から  $Q$  まで積分したとき,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

が成り立つことを示せ.

- (2) 互いに交わらない 2 つの閉曲線  $C_1, C_2$  を考える (ただし  $C_1$  は  $C_2$  の外側にあるとする).  $C_1, C_2$  で囲まれた領域  $D$  内で正則かつ  $C_1, C_2$  上で連続な関数  $f(z)$  を考える ( $z \in C$ ). このとき,

$$\oint_{C_1} f(z) dz = - \oint_{C_2} f(z) dz$$

が成り立つことを示せ. ただし積分は領域  $D$  を左に見る向きにとる.

- (3) (1) より正則な複素関数  $f(z)$  の積分は経路によらない. これより  $f(z)$  の不定積分  $F(z)$  を以下のように定義できる.

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

これより任意の複素数  $\alpha, \beta$  に対し,

$$F(\alpha) - F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta) d\zeta$$

が成り立つ. これらを用いて以下の部分積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) \frac{dg(z)}{dz} dz = [f(z)g(z)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df(z)}{dz} g(z) dz$$

を証明せよ.

## 9.2 さまざまな周回積分

(1) 以下の周回積分を求めよ.

$$(i) \oint \frac{1}{z-a} dz \quad (ii) \oint \frac{1}{z^2+a} dz \quad (iii) \oint \frac{z}{z^2+a} dz$$

(2) 原点を中心とする半径  $r$  の円周を  $C$  とする.  $C$  を正の向きに 1 周する周回積分

$$\oint_C e^{iaz} dz$$

を求め, これを用いて以下の式を証明せよ.

$$(i) \int_0^{2\pi} e^{-ar \sin \theta} \cos(\theta + ar \cos \theta) d\theta = 0$$

$$(ii) \int_0^{2\pi} e^{-ar \sin \theta} \sin(\theta + ar \cos \theta) d\theta = 0$$

### 9.3 導関数の積分公式

$f(z)$  を閉曲線  $C$  の内部およびその上で正則な関数,  $z$  を  $C$  内部の任意の点とすると, コーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (9.1)$$

が成り立つ.

(1) (9.1) 式を用いて  $f(z)$  の一回導関数を求めよ.

(2) (1) の結果を用いて  $f(z)$  の  $n$  階導関数が

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (9.2)$$

となることを証明せよ (ヒント: 例えば数学的帰納法を用いる).

(9.2) はグルサーの公式と呼ばれる. 形式的には周回積分と微分を順序を交換したような形

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta$$

に表すことができる.

(3) 積分路  $C$  を  $|z| = 2$  の円周とすると, 次の式が成り立つことを示せ.

$$(i) \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \sin t$$

$$(ii) \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{ze^{zt}}{z^2 + 1} dz = \cos t$$

## 9.4 コーシーの積分定理の応用

コーシーの積分定理を用いて正則関数について重要な性質が得られる。

### リュービルの定理

$|z| < \infty$  で  $f(z)$  は正則な関数とする。このとき  $|f(z)| < M$  を満たす実数  $M$  が存在するならば、 $f(z)$  は定数である。

証明 仮定より  $|f(z)| < M$  となる  $M$  が存在する。コーシーの積分定理から、任意の点  $z_0$  に対し

$$f(z_0) - f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z_0} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta = \frac{z_0}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z_0)} d\zeta$$

がなりたつ。ここで積分路  $C$  として原点中心の半径  $R$  の円をとる。 $z_0$  はその内部とする。よって、

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f(0)| &= \left| \frac{z_0}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z_0)} d\zeta \right| \\ &= \left| \frac{z_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\theta \right| \\ &< \frac{|z_0|M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|\zeta - z_0|} d\theta. \end{aligned}$$

途中で  $d\zeta = iRe^{i\theta} d\theta$  を用いた。

ここで、 $|z_0| < R/2$  となるように  $R$  をとると、

$$|\zeta - z_0| \leq |\zeta| - |z_0| = R - |z_0| > R/2$$

となる。以上の2つの関係式から、

$$|f(z_0) - f(0)| < \frac{2M|z_0|}{R}$$

となる。 $M, |z_0|$  は有限であるから

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |f(z_0) - f(0)| = 0$$

となる。これは  $f(z) = f(0)$  であること、すなわち  $f(z)$  は定数であることを示す。

## 代数学の基本定理

任意の複素定数  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$  を係数とする  $n$  次方程式 ( $n \geq 1$ )

$$f(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0 \quad (\alpha_n \neq 0)$$

は、少なくとも 1 つの解を持つ。

証明 これは背理法を用いて証明される。  $f(z) = 0$  が解を持たないとする。このときあらゆる  $z$  に対し  $f(z) \neq 0$  が成り立つ。したがって

$$g(z) \equiv \frac{1}{f(z)}$$

は  $|z| < \infty$  で正則かつ有界である。なぜならば  $|z| < \infty$  で  $f(z)$  は有限 (発散しない) で、

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0$$

だからである。したがってリュービルの定理より  $g(z)$  は定数でなければならない。すなわち  $f(z)$  は定数である。しかしこの結果は  $\alpha_n \neq 0$  とした仮定に矛盾する。

これより  $f(z) = 0$  は少なくとも 1 つの解を持つ。

$f(z) = 0$  の 1 つの解を  $\xi_1$  とすると、多項式  $f(z)$  は

$$f(z) = (z - \xi_1) f_1(z)$$

と表される。ここで新たに現れた  $f_1(z)$  についても代数学の基本定理から少なくとも 1 つの解  $\xi_2$  を持つので、 $f(z) = (z - \xi_1)(z - \xi_2) f_2(z)$  と表される。これを繰り返すと  $f(z)$  は完全に因数分解することができ、

$$f(z) = \alpha_n \prod_{i=1}^n (z - \xi_i)$$

と書ける。したがって  $f(z) = 0$  は  $n$  個の解  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  を持つことがわかる。

$f(z)$  が多重根をもつ場合は

$$f(z) = \alpha_n (z - \xi_1)^{n_1} (z - \xi_2)^{n_2} \dots (z - \xi_k)^{n_k}$$

と表される。ここで  $n_i$  は解の多重度を表し、 $n = \sum_{i=1}^k n_i$  である。

複素関数  $f(z)$  が与えられ、 $f(z) = 0$  を満たす点  $z$  を  $f(z)$  の零点と呼ぶ。とくに  $z = \xi$  が  $f(z) = 0$  の  $k$  重根であるとき、 $\xi$  は  $f(z)$  の  $k$  位の零点と呼ぶ。

## 9.5 ベキ級数

以下の形のベキ級数を考える .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (9.3)$$

ここで  $z$  は複素変数,  $a_n (n = 0, 1, 2, \dots)$  は複素定数である.  $z = r e^{i\theta}$  と極表示すると

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \exp(in\theta)$$

と書ける. このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

が収束すれば式 (9.3) は絶対収束する. 以下の問いに答えよ.

- (1) 次式で  $R$  を定義する.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

このとき  $|z| < R$  なら式 (9.3) は絶対収束し,  $|z| > R$  なら発散することを示せ.

- (2)  $R$  を以下のように定義する.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

このときも  $|z| < R$  なら式 (1) は絶対収束し,  $|z| > R$  なら発散することを示せ.

- (3) (1), (2) の  $R$  は結局同一のものである.  $R$  を収束半径という. 以下の複素ベキ級数の収束半径を求めよ .

(i)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

## 9.6 特異点

複素関数  $f(z)$  が正則でない点を  $f(z)$  の特異点という. 点  $z = z_0$  では正則でないがその近傍の全ての点では正則な時,  $z = z_0$  は孤立特異点と呼ばれる.

孤立特異点のなかで最も重要なタイプは極 (pole) と呼ばれるものである.  $f(z)$  が  $z = z_0$  近傍で以下のように書けるとき, 「 $f(z)$  は  $z = z_0$  で  $k$  位の極を持つ」という.

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \quad (9.4)$$

ただし  $g(z)$  は  $z = z_0$  においても正則な関数,  $k$  は自然数である. 別の表現では

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = a \quad (9.5)$$

が一意に定まるとき  $f(z)$  は  $z = z_0$  で  $k$  位の極を持つ. ここで  $a$  は 0 でない有限な複素定数である.

(1) 次の関数の特異点を全て見つけ, それぞれ何位の極か調べよ.

$$(i) f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} \quad (ii) f(z) = \tanh z \quad (iii) f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$$

(2)  $f(z)$  が  $z = z_0$  で  $0/0$  の形になることがある. このとき  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  が  $z \rightarrow z_0$  の近づけ方によらずに一意に定まるとき, このような孤立特異点を除きうる特異点と呼ぶ.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

は除きうる特異点を持つことを示せ.

(3) 孤立特異点のうち, 式 (9.5) を満たす自然数  $k$  が存在せず, しかも除きうる特異点でないものを真正特異点という.

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

は原点に真性特異点を持つことを示せ.

## 9.7 無限遠点とリーマン球面

実関数では正の無限大と負の無限大 ( $\pm\infty$ ) を考えた. 複素関数についても同様の概念の導入を試みる.

今  $w = f(z) = 1/z$  という複素関数を考える.  $f(z)$  は  $z = 0$  に特異点を持つ.  $z$  が原点に近付くと  $w$  の絶対値は無限に大きくなり,  $w$  平面の原点から次第に遠ざかっていく. 偏角の値は  $z$  の原点への近付き方に依存するため,  $z$  平面上の原点を含むその近傍領域は  $w$  平面上の無限に広い領域に対応する.

しかし,  $w = 1/z$  によって  $z$  平面上の原点以外の点は  $w$  平面上の点に 1 対 1 対応している. 原点だけが  $w$  平面上の無数の点に対応しているのは美しくくない. そこで  $w$  平面上に  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/z$  に対応する 1 点を考え, これを無限遠点と呼ぶことにする. 無限遠点を含む複素平面を拡張された複素平面という.

拡張された複素平面の幾何学的表現としてリーマン球面 (図 9.1) がある. これは複素平面を 3 次元空間の平面と考えた場合に, その原点に接する半径  $1/2$  の球面である.  $z$  平面上の任意の点  $z$  はその点と  $z$  平面から最も遠い球面上の点  $N$  とを結ぶ直線が球面と交わる点  $Z$  に対応させる. この方法によって  $z$  平面上  $|z| < 1$  の点は球面の下半球上の各点に,  $|z| = 1$  の円周上の点は赤道に,  $|z| > 1$  の点は球面の上半球上の各点に対応する.  $z$  平面から最も遠い球面上の点  $N$  が無限遠点  $z = \infty$  にあたる.

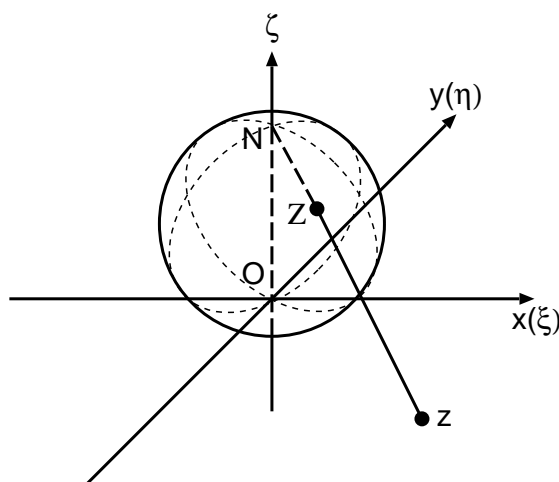


図 9.1: リーマン球面

- (1) 原点  $O$  を中心とし,  $z$  平面の実軸と虚軸を  $\xi, \eta$  軸に,  $O$  を通り  $z$  平面に垂直な方向に  $\zeta$  軸をとる.  $(\xi, \eta, \zeta)$  座標系におけるリーマン球面を表す方程式を求めよ.



- (2) リーマン球面上の無限遠点  $N$  と  $z$  平面上の点  $(x, y, 0)$  を通る直線の方程式を  $(\xi, \eta, \zeta)$  を用いて表せ.
- (3) リーマン球面上の点  $(\xi, \eta, \zeta)$  と  $z$  平面上の点  $z$  との間に成り立つ関係式を求め,  $z$  平面上の点原点を中心とした任意の半径を持つ円周上の点は, それと平行なリーマン球面上の円に対応することを示せ.
- (4) 次の関数は無限遠点において正則か. 正則でない場合, 無限遠点はどのような特異点となっているか (ヒント:  $\zeta = 1/z$  とおき,  $f(1/\zeta)$  の  $\zeta = 0$  における振る舞いを考える).
- (i)  $f(z) = a + bz^{-2}$  ( $a, b$  は複素定数)
  - (ii)  $f(z) = z(1 + z^2)$
  - (iii)  $f(z) = e^z$