11.1 複素積分に関する補助定理

C を有限な長さをもつ区分的に滑らかな曲線[1]とする. このとき C に沿った複素積分について以下の不等式が成り立つ.

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)||\,dz| \le ML \tag{11.1}$$

ここで M は $|f(z)|$ の積分路 C 上での上界 $(f(z) \le M)$, L は積分路 C の全長である.

(1) 原点を中心とする半径 R の任意の円弧 $(\theta_a \le \theta \le \theta_b)$ 上にとった積分

$$I_R = \int_C f(z)\,dz$$

を考える. $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = O(|z|^\alpha)(\alpha < -1)$ の場合,

$$\lim_{R\to\infty} I_R = 0$$

となることを示せ.

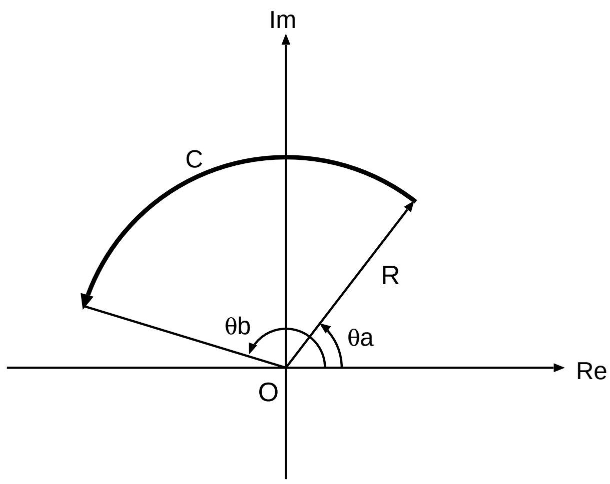

図 11.1:

(2) $0 \le \arg z \le \pi$ とする. このとき原点を中心とする半径 R の上半円を正の向きに進む経路 C 上にとった積分

$$I_R = \int_C e^{iaz} f(z)\,dz$$

[1]微分不可能な点がたかだか有限個な曲線のこと.

を考える ($a > 0$). $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$ の場合,

$$\lim_{R \to \infty} I_R = 0$$

となることを示せ.

これは **ジョルダンの補助定理** と呼ばれる.

(3) (2) で $a < 0$ の場合について考察せよ.

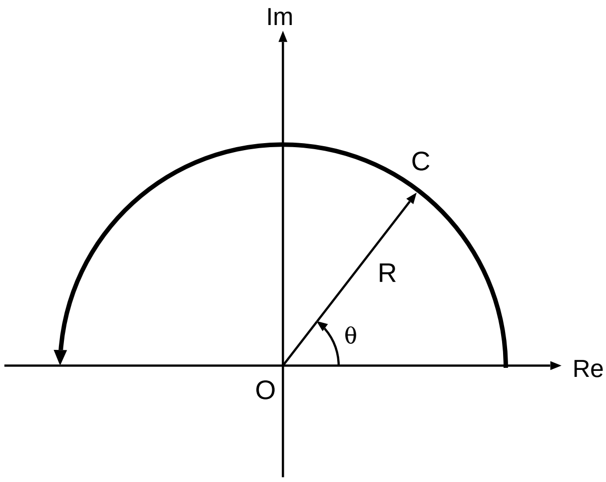

図 11.2:

11.2 留数定理を用いた実関数の積分 (1)

実関数 $f(\cos\theta, \sin\theta)$ は $\cos\theta, \sin\theta$ の有理関数で, $0 \le \theta \le 2\pi$ で連続とする. このとき以下の積分について考える.

$$I_R = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta. \tag{11.2}$$

(1) $z = e^{i\theta}$ とおくと, 上記の積分は

$$I_R = \frac{1}{i}\oint_C f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{z}$$

と表されることを示せ. ここで C は複素平面上の原点を中心とする単位円に沿って正の向きに一周する経路である.

(2) コーシーの積分定理と留数定理から, 上記の積分は

$$I_R = \begin{cases} 0 & f/z \text{ が } C \text{ 内で正則} \\ 2\pi \sum_{n=1}^{r} \mathrm{Res}\,[f/z]_{z=z_n} & f/z \text{ が } C \text{ 内で正則でない} \end{cases}$$

となる. ここで z_n は C 内における f/z の極である. これを用いて以下の実積分を求めよ.

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} \quad (a > b)$

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{1 - 2a\cos 2\theta + a^2}\, d\theta \quad (1 > a \ge 0)$

11.3 留数定理を用いた実関数の積分 (2)

実関数 $f(z)$ は $\lim_{z\to\infty}|f(z)| = O(|z|^{\alpha})(\alpha < -1)$ をみたすとする. このとき以下の積分について考える.

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{11.3}$$

(1) 複素積分を利用すると,

$$I_R = \lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)\,dz$$

と表されることを示せ. ここで z は複素数で, C は図 11.3 のように実軸上の線分 $-R \le x \le R$ と, 原点を中心とする半径 R の上半円 Γ に沿って正の向きに一周する経路である.

(2) コーシーの積分定理と留数定理から,

$$I_R = \begin{cases} 0 & f(z) \text{が } C \text{ 内で正則} \\ 2\pi i \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\, f(z_k) & f(z) \text{が } C \text{ 内で正則でない} \end{cases}$$

となる. ここで z_k は C 内における $f(z)$ の極である (Im $z_k > 0$). これを用いて以下の実積分を求めよ.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$　　(ii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^4+a^4}\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}\,dx \quad (0 < m < n)$

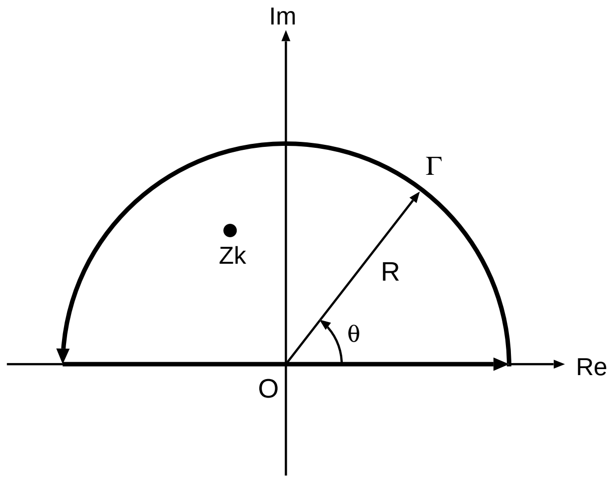

図 11.3:

11.4 留数定理を用いた実関数の積分 (3)

実関数 $f(z)$ は $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ を満たすとする. このとき以下の積分について考える.

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx \quad (a > 0). \tag{11.4}$$

(1) 複素積分を利用すると,

$$I_R = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z)e^{iaz}\,dz$$

と表されることを示せ. ここで z は複素数で, C は図 11.3 に示した積分路とする.

(2) コーシーの積分定理と留数定理から,

$$I_R = \begin{cases} 0 & f(z)e^{iaz}\text{が } C \text{ 内で正則} \\ 2\pi i \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\,[f(z)e^{iaz}]_{z=z_k} & f(z)e^{iaz}\text{が } C \text{ 内で正則でない} \end{cases}$$

となる. ここで z_k は C 内における $f(z)$ の極である (Im $z_k > 0$). これを用いて以下の実積分を求めよ.

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x - ib}\,dx \quad (b > 0)$

11.5 積分の主値

関数 $f(z)$ が実軸上 $(z = z_0)$ に極を 1 つ持つ場合の定積分を考える. $f(z)$ は $z = z_0$ 以外の点では有限個の極を除いて正則とする. このとき積分の主値 $P\int_{-R}^{R} f(x)dx$ を以下のように定義する.

$$P\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \equiv \int_{-R}^{z_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{z_0+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx \quad (\varepsilon \to 0) \tag{11.5}$$

ここで $R, \varepsilon > 0$ である.

図 11.4 のような周回積分路を考える. Γ を原点を中心とする半径 R の上半円 (始点 R, 終点 $-R$), γ を極 $z = z_0$ を中心とする半径 ε の上半円 (始点 $z_0 - \epsilon$, 終点 $z_0 + \epsilon$) とする.

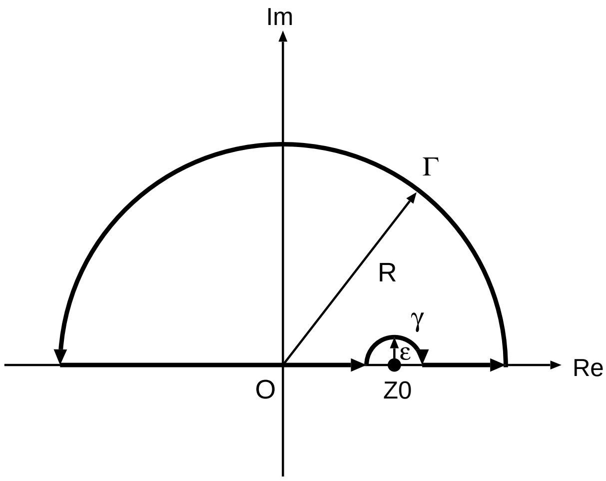

図 11.4:

(1) z_k を z_0 を除く Im $z_k > 0$ であるような $f(z)$ の極であるとする. このとき,

$$\int_\Gamma f(z)\,dz + P\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z_k)$$

を示せ.

(2)

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -\pi i \mathrm{Res}\ f(z_0)$$

を示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ ならば

$$P\int_{-R}^{R} f(x)dx = \pi i \text{Res}\ f(z_0) + 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Res}\ f(z_k)$$

であることを示せ.

(4) 次の積分を求めよ.

(i) $\displaystyle P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x-a}\,dx \quad ,(a\in \boldsymbol{R}, m>0)$

(ii) $\displaystyle P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$

(iii) $\displaystyle \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

(iv) $\displaystyle \int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx \quad (0<a<1)$