1.1 複素数の性質

複素数 z は任意の実数 x, y と虚数単位 i を用いて $z = x + iy$ と定義される. x, y はそれぞれ z の **実部** (real part), **虚部** (imaginary part) と呼び, $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$ と表す.

(1) $-i$ の平方根を求めよ.

(2) 2 つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ の和, 差, 積は

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2), \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

と表される. このとき z_1/z_2 の実部, 虚部を x_1, y_1, x_2, y_2 を用いて表せ.

(3) 複素数 $z = x+iy$ の虚部の符号を変えたもの $x-iy$ を z の**共役複素数** (complex conjugate) と呼び, $\overline{z}$ と表す. このとき以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2} \quad (z_2 \neq 0).$$

(4) 複素数 $z = x + iy$ の絶対値 $|z|$ は $\sqrt{x^2 + y^2}$ と定義される. このとき任意の 2 つの複素数 z_1, z_2 に対し, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{(三角不等式)}$$

(5) 一般に n 個の複素数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ に対し, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \tag{1.1}$$

1.2 複素数の指数関数

a, t は実数とする. このとき指数関数 e^{at} は

$$e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{(at)^2}{2!} + \cdots$$

と無限級数を用いて表される. ただし $0! = 1$ とする. さらに e^{at} は次の微分方程式の初期値問題,

$$\frac{df(t)}{dy} = af(t), \quad f(0) = 1,$$

の解である.
以下では a を複素数に拡張可能であるとする.

(1) オイラーの公式

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{1.2}$$

が成り立つことを示せ. ここで y は実数である.

(2) 任意の 2 つの複素数 z_1, z_2 に対し, $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ となることを示せ (ヒント: e^{at} が上記の微分方程式の解であることを利用する).

1.3 複素数の極形式

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) は横軸に実数, 縦軸に虚数にとった **複素平面** (complex plane) 上のある 1 点として表現される. このとき

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}, \tag{1.3}$$

と表される. これを複素数の **極形式** という. 最後の等号関係はオイラーの公式を用いた. ここで $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, θ は z の **偏角** (argument) と呼ばれ, $\theta = \mathrm{arg} z$ と表される.

(1) z が実数の場合および純虚数の場合, $\mathrm{arg} z$ はそれぞれどうなるか.

(2) 次の複素数を極形式で表せ

$$i, \quad -i, \quad 1 - i, \quad 1 + \sqrt{3}i$$

(3) ド・モアブルの公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \tag{1.4}$$

が成り立つことを示せ.

(4) $z^3 = 1$ の根を全て求め, それを複素平面上に図示せよ.

(5) 任意の自然数 n に対し $z^n = 1$ の根は複素平面上でどのような幾何学的位置にあるか.

1.4 オイラーの公式の利用

オイラーの公式 (1.2), ド・モアブルの公式 (1.3) を用いて以下の公式が成り立つことを示せ.

(1) $\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \mp \sin\theta_1 \sin\theta_2$

(2) $\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1 \sin\theta_2 \pm \sin\theta_1 \cos\theta_2$

(3) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

(4) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

1.5 複素平面

次の関係式を満たす z の軌跡, もしくは z の範囲を複素平面上に図示せよ.

(1) $|z-3|=1$

(2) $1 \leq |z| \leq 3$

(3) $|1/z|<1$

(4) arg$z=-\pi/6$

(5) Re$z<1$

(6) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|^2 \geq 3$

(7) $|z-2|+|z+2|<3$

1.6 複素平面上の幾何学

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は複素平面上の点であるとする.

(1) 2 点 α, β を通る直線の式を求めよ.

(2) α, β を通る直線と γ, δ を通る直線が平行または直交する条件は, それぞれ

$$\mathrm{Im}\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=0, \quad \mathrm{Re}\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=0,$$

であることを示せ.

(3) 3 点 α, β, γ を通る円の式を求めよ.

(4) 4 点 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が同一の円周上にあるための条件を求めよ.