3.1 固有値と固有ベクトル (1)

$\boldsymbol{A}$ を n 次の正方行列, $\boldsymbol{x}$ を n 次の列ベクトルとする. このとき

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{3.1}$$

を満たすようなベクトル $\boldsymbol{x}$ を 行列 $\boldsymbol{A}$ の **固有値** (eigenvector), λ を **固有値** (eigenvalue) と呼ぶ. このとき以下の性質が成り立つことを証明せよ.

(1) $\boldsymbol{A}$ の相異なる固有値に対する固有ベクトルは線形独立である.

(2) 正規行列の相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する. ここで正規行列とは $(\boldsymbol{A}^\dagger)_{ij} = (\boldsymbol{A})^*_{ji}$ である **随伴行列** $\boldsymbol{A}^\dagger$ に対し, $\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger$ が成り立つような行列である.

(3) エルミート行列の固有値は実数である. ここでエルミート行列とは $\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}^{-1}$ が成り立つような行列である.

(4) 反エルミート行列の固有値は純虚数でまたは 0 である. ここで反エルミート行列とは $\boldsymbol{A}^\dagger = -\boldsymbol{A}^{-1}$ が成り立つような行列である.

3.2 永年方程式

(3.1) 式は以下のように書き換えられる.

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = 0. \tag{3.2}$$

ここで $\boldsymbol{E}$ は単位行列である. 自明でない解が存在する場合は,

$$\det\,(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.3}$$

が成り立つ. これは λ に対する n 次の代数方程式

$$f_A(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0 \tag{3.4}$$

である. (3.4) を $\boldsymbol{A}$ の **特性方程式** (characteristic equation) あるいは **永年方程式** (secular equation) と呼ぶ. このとき以下が成り立つことを示せ.

(1) $c_{n-1} = -\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$. ここで tr $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}$ の対角成分の和である.

(2) $c_0 = (-1)^n \det \boldsymbol{A}$.

3.3 調和振動

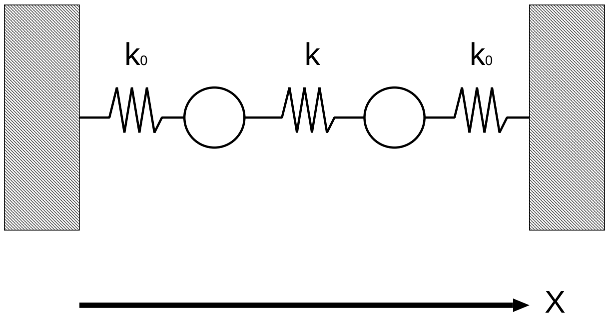
下図のようにばねによって結ばれた質量 m の二つの振動子を考える. 左右のばね定数を k_0, 中央のばね定数を k とする.

(1) 右側の振動子の座標を x_1, 左側の振動子の座標を x_2 として運動方程式を求めよ.

(2) $x_1 = r_1 e^{i\omega t}, x_2 = r_2 e^{i\omega t}$ とおいて, x_1, x_2 が自明でない解を持つために必要な ω の満たす式を求めよ.

(3) ω を求め, それによって表される解の特徴を議論せよ.

(4) 一般解を求めよ. さらに $k \ll k_0$ の場合の解を求め, その特徴を議論せよ.



[

3.4 相似変換と対角化

n 次正方行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'$ に対し, n 次正則行列 $\boldsymbol{Q}$ が存在し,

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$$

であるとき $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'$ は相似であるといい, この変換を相似変換とよぶ.

(1) $\boldsymbol{A}$ の特性方程式は相似変換に対し不変であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値に重根がない場合, $\boldsymbol{A}$ は相似変換によって対角化可能であることを示せ. なお対角化とは対角成分のみ 0 でない値を持つ行列に変換することである.

(3) 次の行列が対角化可能かどうか調べ, 可能ならば対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & 0 & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1-i}{2} & 0 & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3.5 三角行列と対角化

行列成分の左下 (右上) の成分が全て 0 である行列を **上 (下) 三角行列**, または単に三角行列と呼ぶ.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ 0 & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(1) n 次正方三角行列の固有多項式は $\prod_{i=1}^{n}(\lambda - a_{ii})$ となることを示せ. ただし λ は固有値とする.

(2) n 次正方行列は適当なユニタリ行列の相似変換によって三角行列に変換されることを証明せよ. ここでユニタリ行列とは $\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ が成り立つような行列である.

3.6 固有値と固有ベクトル (2)

次の行列について固有値と対応する正規化された固有ベクトルを求め, 対角化もしくは三角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$