

4.1 ベクトルの内積と外積

方向と大きさを持つ量をベクトル (vector) と呼ぶ。以下ではベクトルを太文字のアルファベット a 等として表し, 特に注意のない限り右手系の 3 次元ベクトルを考える。ベクトル a, b の成分をそれぞれ $a_i, b_i (i = 1 \sim 3)$ とすると, a, b の内積 (inner product, scalar product) と外積 (outer product, vector product) は, 添字についてアインシュタインの規約¹に従うとするとそれぞれ以下のように与えられる。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\varepsilon_{1ij} a_i b_j, \varepsilon_{2ij} a_i b_j, \varepsilon_{3ij} a_i b_j) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \cdot \mathbf{e}_k. \quad (4.2)$$

ここで θ はベクトル a, b のなす角, \mathbf{e}_k はベクトル a, b によって張られる平面に垂直なベクトルで, その向きは a から b へと右まわりに進むねじの方向にとる。 ε_{ijk} はエディントンのイプシロンで, 以下のように定義される。

i	j	k	ε_{ijk}
1	2	3	1
2	3	1	1
3	1	2	1
1	3	2	-1
3	2	1	-1
2	1	3	-1
			0

- (1) 任意のベクトル a, b について, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ となること示せ。
- (2) 任意のベクトル a, b について, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ となることを示せ (スカラー 3 重積)。
- (3) 任意のベクトル a, b について, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ となることを示せ (ベクトル 3 重積)。
- (4) スカラー 3 重積とベクトル 3 重積の幾何学的な意味を説明せよ。

¹同じ添字が 2 つ以上現れた場合にはその添字について和をとる, というもの。

4.2 ローレンツ力

電場 E , 磁束密度 B 中を速度 v で運動する電荷 q を持つ荷電粒子は, 以下の式で与えられる力 F を受ける.

$$F = q(E + v \times B)$$

- (1) $E = 0, v = (u, v, 0), B = (0, 0, B)$ とする. このとき荷電粒子の運動方程式を求めよ.
- (2) $E \cdot B = 0$ とする. 速度 $E \times B/B^2$ で動く座標系から荷電粒子の運動を見た場合, F から電場が消えることを示せ.
- (3) 上記 (2) の場合において $E = (0, E, 0), B = (0, 0, B)$ のとき, 速度 $E \times B/B^2$ の大きさと向きを示せ.

4.3 ベクトルの微分

$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ とする. このときベクトル \mathbf{a} の導関数は以下のように与えられる.

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(t+h) - \mathbf{a}(t)}{h} = \left(\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \frac{da_3}{dt} \right).$$

このとき以下が成り立つことを示せ.

(1)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

(2)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

(3)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

4.4 中心力場の運動

ある点 (たとえば原点) からの距離のみによって決まる力を中心力と呼ぶ. 中心力 F は位置ベクトル r を用いて一般に

$$F = f(r) \frac{r}{r}$$

と表される. ここで $f(r)$ は r のみによって決まる関数である. このとき中心力の中での運動する物体について, $r \times \frac{dr}{dt}$ は時間によらず一定であることと, 運動はある 1 つの平面内に限定されることを示せ.

4.5 回転系の運動方程式

静止している直交座標系に対し、第 3 軸を軸として一定の角速度 ω で回転する座標系の運動方程式を以下の手順で求めよ。

- (1) 静止している直交座標系の基底ベクトルを e_1, e_2, e_3 , 回転する座標系の基底ベクトルを e'_1, e'_2, e'_3 とする。このとき

$$\frac{de'_1}{dt} = \omega \times e'_1, \quad \frac{de'_2}{dt} = \omega \times e'_2, \quad \frac{de'_3}{dt} = 0,$$

であることを示せ。ただし $\omega = \omega e'_3$ である。

- (2) 位置ベクトル $\mathbf{r} = xe_1 + ye_2 + ze_3 = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3 = \mathbf{r}'$ について以下の関係が成り立つことを示せ。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}'}{dt} &= \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \omega \times \mathbf{r}', \\ \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} &= \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{d'\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d'x'}{dt}e'_1 + \frac{d'y'}{dt}e'_2 + \frac{d'z'}{dt}e'_3, \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d^2x'}{dt^2}e'_1 + \frac{d^2y'}{dt^2}e'_2 + \frac{d^2z'}{dt^2}e'_3 \end{aligned}$$

と表される回転系の時間微分である。

- (3) 静止系での運動方程式

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

を回転系の表現に変換せよ。