6.1 ベクトル場の線積分

空間内の領域 D において定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{A} = a_1(x,y,z)\boldsymbol{e}_1 + a_2(x,y,z)\boldsymbol{e}_2 + a_3(x,y,z)\boldsymbol{e}_3$$

と D 内の無限小変移 $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{e}_1 + dy\boldsymbol{e}_2 + dz\boldsymbol{e}_3$ との内積を, 経路 C に沿って積分したもの

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C a_1(x,y,z)\,dx + a_2(x,y,z)\,dy + a_3(x,y,z)\,dz \tag{6.1}$$

をベクトル $\boldsymbol{A}$ の C に沿う **線積分** と呼ぶ.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_C (\alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{r} = \alpha\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} + \beta\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

(ii)

$$\int_{-C} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

ここで経路 $-C$ は経路 C を逆向きにたどる経路である.

(2) スカラー場 φ の勾配ベクトル場 $\nabla\varphi$ の空間内の点 A から点 B にいたる経路 C 沿った線積分は

$$\int_C \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

となることを示せ. ここで $\varphi(A)$ は点 A における ϕ の値を表す.

6.2 ベクトル場の面積分

空間内の領域 D 内の曲面 S を含む領域において定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{A} = a_1(x,y,z)\boldsymbol{e}_1 + a_2(x,y,z)\boldsymbol{e}_2 + a_3(x,y,z)\boldsymbol{e}_3$$

に対し, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の **面積分** を以下のように定義する.

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_S a_1n_1(x,y,z) + a_2n_2(x,y,z) + a_3n_3(x,y,z)\,dS. \tag{6.2}$$

ここで $d\boldsymbol{S}, dS$ はそれぞれ曲面 S 上の **ベクトル面積素** と**面積素**, $\boldsymbol{n}$ は面積素 dS の **法線ベクトル** で, n_i はその各成分である.

(1) 以下が成り立つことを示せ.

(i)

$$\int_S (\alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S} = \alpha\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} + \beta\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

(ii)

$$\int_{-S} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

ここで $-S$ は S の法線ベクトルを逆向きにとることを示す.

(2) $\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルとするとき,

$$\int_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を, S が以下の場合について求めよ. ただし法線ベクトルの向きは S の内側から外側にとる.

(i) 単位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

(ii) 平面 $x=\pm1, y=\pm1, z=\pm,1$ で囲まれる立方体の表面.

6.3 平面におけるグリーンの定理

(1) xy 平面上の $a \le x \le b$ の区間において, $\varphi_2(x) \le \varphi_1(x)$ である関数によって与えられる領域

$$D = \{(x,y)|\varphi_2(x) \le y \le \varphi_1(x), a \le x \le b\}$$

を定義する. 領域 D 内で定義された一階微分可能な関数 $P(x,y)$ について,

$$-\int\int_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_C P\,dx \tag{6.3}$$

が成り立つことを示せ. ここで右辺の線積分の経路 C は D を囲む境界線を反時計周りに一周するものである.

(2) (1) と同様の手順を用いることで, 領域 D 内で定義された一階微分可能な関数 $Q(x,y)$ について,

$$\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_C Q\,dy \tag{6.4}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 任意の領域 D に対して (6.3) または (6.4) が成り立つことを示せ.

(6.3) と (6.4) の和

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy \tag{6.5}$$

は平面におけるグリーンの定理である.

6.4 ガウスの定理

一階微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と, $\boldsymbol{A}$ が存在する空間内の閉曲面 S および S によって囲まれた領域 V を考える. このとき,

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV \tag{6.6}$$

が成り立つ. これを **ガウスの定理** と呼ぶ.

(1) 領域 V として xyz 直線直交座標系における微小体積を考えることにより, (6.6) が成り立つことを示せ.

(2) 以下の関係が成り立つことを示せ. ただし f, g はスカラー関数, $\frac{\partial}{\partial n}$ は面要素 dS の法線方向微分, 左辺の面積分は閉曲面 S について行うものとする.

(i)

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial n}\,dS = \int_V \nabla^2 f\,dV$$

(ii)

$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial n}\,dS = \int_V \nabla\cdot(f\nabla g)\,dV$$

(3) 密度 $\rho(x,y,z,t)$ である流体が速度 $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ で運動しているとする. 流体のわきだしも吸い込みもないとすると, 以下の方程式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0. \tag{6.7}$$

(4) 熱は温度の高い所から低い所へ向かって輸送される. このとき単位面積を単位時間に通過する熱 q (J/m^{2}sec) は

$$q = -k\nabla T \tag{6.8}$$

と表される. ここで k は **熱伝導率** (thermal conductivity) である. このような熱輸送過程を **熱伝導** と呼ぶ. 熱輸送が熱伝導によってのみ行われる場合, 温度変化は以下の式で表されることを示せ.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\nabla^2 T. \tag{6.9}$$

ここで κ は **熱拡散率** (thermal diffusivity) で, 物体の密度 ρ と単位質量あたりの比熱 c_p を用いて $\kappa = k/\rho c_p$ と表される.

6.5 ストークスの定理

一階微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と, $\boldsymbol{A}$ が存在する空間内の閉曲線 C および C によって囲まれた曲面 S を考える. このとき,

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{6.10}$$

が成り立つ. これを **ストークスの定理** と呼ぶ. ただし法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは C の正方向 (C に囲まれた領域を右側に見る向き) に進む右螺の進む向きにとる.

(1) 曲面 S として xyz 直線直交座標系における xy 平面に平行な面要素を考えることにより, (6.10) が成り立つことを示せ.

(2) 閉曲線 C に沿って発生する電場を $\boldsymbol{E}$ とすると, ファラデーの電磁誘導の法則から

$$\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

である. ここで Φ は C によって囲まれた曲面 S を貫く磁束である. $\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ であることを用いて, 微分形のファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \tag{6.11}$$

を求めよ. ここで $\boldsymbol{B}$ は磁束密度である.