

8.1 複素数の性質

複素数 z は任意の実数 x, y と虚数単位 i を用いて $z = x + iy$ と定義される. x, y はそれぞれ z の実部 (real part), 虚部 (imaginary part) と呼び, $x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z)$ と表す.

(1) $-i$ の平方根を求めよ.

(2) 2 つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ の和, 差, 積は

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2), \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

と表される. このとき z_1/z_2 の実部, 虚部を x_1, y_1, x_2, y_2 を用いて表せ.

(3) 複素数 $z = x + iy$ の虚部の符号を変えたもの $x - iy$ を z の共役複素数 (complex conjugate) と呼び, \bar{z} と表す. このとき以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2 \quad (z_2 \neq 0).$$

(4) 複素数 $z = x + iy$ の絶対値 $|z|$ は $\sqrt{x^2 + y^2}$ と定義される. このとき任意の 2 つの複素数 z_1, z_2 に対し, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{三角不等式})$$

(5) 一般に n 個の複素数 z_1, z_2, \dots, z_n に対し, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \quad (8.1)$$

8.2 複素数の指数関数

a, t は実数とする. このとき指数関数 e^{at} は

$$e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{(at)^2}{2!} + \cdots$$

と無限級数を用いて表される. ただし $0! = 1$ とする. さらに e^{at} は次の微分方程式の初期値問題,

$$\frac{df(t)}{dy} = af(t), \quad f(0) = 1,$$

の解である.

以下では a を複素数に拡張可能であるとする.

- (1) オイラーの公式

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{8.2}$$

が成り立つことを示せ. ここで y は実数である.

- (2) 任意の 2 つの複素数 z_1, z_2 に対し, $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ となることを示せ (ヒント: e^{at} が上記の微分方程式の解であることを利用する).

8.3 複素数の極形式

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) は横軸に実数, 縦軸に虚数にとった複素平面 (complex plane) 上のある 1 点として表現される. このとき

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad (8.3)$$

と表される. これを複素数の極形式という. 最後の等号関係はオイラーの公式を用いた. ここで $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, θ は z の偏角 (argument) と呼ばれ, $\theta = \arg z$ と表される.

- (1) z が実数の場合および純虚数の場合, $\arg z$ はそれぞれどうなるか.
- (2) 次の複素数を極形式で表せ

$$i, \quad -i, \quad 1 - i, \quad 1 + \sqrt{3}i$$

- (3) ド・モアブルの公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad (8.4)$$

が成り立つことを示せ.

- (4) $z^3 = 1$ の根を全て求め, それを複素平面上に図示せよ.
- (5) 任意の自然数 n に対し $z^n = 1$ の根は複素平面上でどのような幾何学的位置にあるか.

8.4 オイラーの公式の利用

オイラーの公式 (1.2), ド・モアブルの公式 (1.3) を用いて以下の公式が成り立つことを示せ.

$$(1) \cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$(2) \sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos \theta_1 \sin \theta_2 \pm \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$(3) \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$(4) \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

8.5 複素平面

次の関係式を満たす z の軌跡, もしくは z の範囲を複素平面上に図示せよ.

(1) $|z - 3| = 1$

(2) $1 \leq |z| \leq 3$

(3) $|1/z| < 1$

(4) $\arg z = -\pi/6$

(5) $\operatorname{Re} z < 1$

(6) $\left| \frac{z-1}{z+1} \right|^2 \geq 3$

(7) $|z - 2| + |z + 2| < 5$