9.1 複素平面上の写像

以下の複素関数

$$w = f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad z \neq -\delta/\gamma)$$

を考える. ただし $z, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \boldsymbol{C}$ とする.

(1) この変換で z 平面上の異なる点は w 平面上の異なる点に対応する (1 対 1 対応する) ことを示せ.

(2) $\beta = -\overline{\alpha}, \delta = -\overline{\gamma}$ の場合, z 平面の原点を中心とする単位円 C は w 平面上の実軸に対応することを示せ.

(3) $\beta = -\overline{\alpha}, \delta = -\overline{\gamma}$, かつ Im $\dfrac{\alpha}{\gamma} < 0$ の場合, z 平面の原点を中心とする単位円 C の内部の点 $z(|z| < 1)$ は w 平面上の上半面の点 (Im $w > 0$) に対応することを示せ.

9.2 複素関数の極限と連続性

領域 D で定義された複素関数 $w = f(z)$ を考える. z が D 内を移動してある点 z_0 に近付くとき, w が w 平面内の点 w_0 に近付く場合, $f(z)$ は $z = z_0$ で**極限値** w_0 **を持つ**という. 数式では

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{1}$$

と表す. このとき z_0 **にどの方向から近付いても** w **は** w_0 **に近付く** (すなわち偏角によらない) ことが必要である.

複素関数 $w = f(z)$ が次の 3 つの条件 [1] $z = z_0$ で $f(z_0)$ が存在する, [2] $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ が存在する, [3] $w_0 = f(z_0)$ が成り立つ, を同時に満たすとき, $f(z)$ は $z = z_0$ で**連続**であるという

(1) 次の関数の極限値を求めよ.

(i) $\dfrac{1}{1+z^2} \quad (z \to i)$ (ii) $\dfrac{1+z^2}{1+iz} \quad (z \to i)$ (ii) $\dfrac{z}{\overline{z}} \quad (z \to 0)$

(2) 次の関数の $z = 0$ における連続性を調べよ.

(i) $f(x) = \begin{cases} (z+\overline{z})/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} (z+\overline{z})^2/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$

9.3 複素関数の微分

h を偏角一定の複素数とする. このとき極限値

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \tag{2}$$

が h の取り方によらず一意に定まる時, $f(z)$ は $z=z_0$ で**微分可能**と言う. その極限値を $f(z)$ の $z=z_0$ における微分係数と言い, $f'(z_0)$ や $\dfrac{df}{dz}(z_0)$ 等と記す. 領域 D の各点において $f(z)$ が微分可能な時, $f(z)$ は D 上で**正則**であるという.

(1) $f(z)=z^2$ とする. $h=\Delta x$ として式 (2) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(2) $f(z)=z^2$ とする. $h=i\Delta y$ として式 (2) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(3) $f(z)=z^2$ とする. $h=\Delta x+i\Delta y$, $\Delta y=k\Delta x$ として, 式 (2) の定義に従い $f'(z)$ を計算せよ.

(4) $f(z)=z^n$ の場合, 式 (2) の極限は h の偏角の値によらず nz^{n-1} に収束することを示せ.

9.4　正則性 (1)

$z = x + iy,\ x, y \in \boldsymbol{R}$ とする. 次の関数 $f(z)$ はコーシー・リーマンの関係式を満たすかどうか調べよ.

(1) $f(z) = x^2 - y^2 - x + 5 + i(2x - 1)y$

(2) $f(z) = e^{-y}\,(\cos x + i\,\sin x)$

(3) $f(z) = z - \bar{z}$

(4) $f(z) = z + 1/z$

9.5 正則性 (2)

関数 $f(z)$ が正則でかつ次のいずれかが成り立つとき, $f(z)$ は定数であることを示せ.

(1) $f'(z) = 0$

(2) Re$f(z) =$ 定数

(3) Im$f(z) =$ 定数

(4) $f(z) =$ 実数, (または純虚数)

9.6 指数関数の仲間

$z \in \boldsymbol{C}$ とする. このとき指数関数 e^z, 三角関数 $\cos z, \sin z$ は次の無限級数で定義される. ただし $0! = 1$ とする.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\cos z$ と $\sin z$ を e^{iz}, e^{-iz} を用いて表せ.

(2) $z = e^w$ を満たす w を対数関数といい $w = \log z$ で表す. このとき $\log z$ は無限多価関数であることを示せ.

z の偏角 θ を $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲に限った時これを $\log z$ の**主値**と呼び Log$z$ と記す (注: 主値を与える範囲として $-\pi \leq \theta \leq \pi$ をとることもある).

(3) $\cos^{-1} z, \sin^{-1} z$ をそれぞれ対数関数であらわし, 導関数を求めよ.