10.1 正則関数の積分

(1) $f(z)$ を領域 D において正則な関数 ($z \in \boldsymbol{C}$) とする. D 内の 2 点 P, Q を結び, かつ D 内に含まれる任意の 2 つの曲線 C_1, C_2 に沿って点 P から Q まで積分したとき,

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つことを示せ.

(2) 互いに交わらない 2 つの閉曲線 C_1, C_2 を考える (ただし C_1 は C_2 の外側にあるとする). C_1, C_2 で囲まれた領域 D 内で正則かつ C_1, C_2 上で連続な関数 $f(z)$ を考える ($z \in \boldsymbol{C}$). このとき,

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = -\oint_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つこと示せ. ただし積分は領域 D を左に見る向きにとる.

(3) (1) より正則な複素関数 $f(z)$ の積分は経路によらない. これより $f(z)$ の不定積分 $F(z)$ を以下のように定義できる.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

これより任意の複素数 α, β に対し,

$$F(\alpha) - F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta)\,d\zeta$$

が成り立つ. これらを用いて以下の部分積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\frac{dg(z)}{dz}\,dz = [f(z)g(z)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df(z)}{dz} g(z)\,dz$$

を証明せよ.

10.2　さまざまな周回積分

(1) 以下の周回積分を求めよ.

$$\text{(i)}\quad \oint \frac{1}{z-a}\,dz \quad \text{(ii)}\quad \oint \frac{1}{z^2+a}\,dz \quad \text{(iii)}\quad \oint \frac{z}{z^2+a}\,dz$$

(2) 原点を中心とする半径 r の円周を C とする. C を正の向きに 1 周する周回積分

$$\oint_C e^{iaz}\,dz$$

を求め, これを用いて以下の式を証明せよ.

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ar\sin\theta}\cos(\theta + ar\cos\theta)\,d\theta = 0$

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ar\sin\theta}\sin(\theta + ar\cos\theta)\,d\theta = 0$

10.3 導関数の積分公式

$f(z)$ を閉曲線 C の内部およびその上で正則な関数, z を C 内部の任意の点とすると, コーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{10.1}$$

が成り立つ.

(1) (10.1) 式を用いて $f(z)$ の一回導関数を求めよ.

(2) (1) の結果を用いて $f(z)$ の n 階導関数が

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta \tag{10.2}$$

となることを証明せよ (ヒント: 例えば数学的帰納法を用いる).

(10.2) は**グルサーの公式**と呼ばれる. 形式的には周回積分と微分の順序を交換したような形

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right)d\zeta$$

に表すことができる.

(3) 積分路 C を $|z| = 2$ の円周とするとき, 次の式が成り立つことを示せ.

(i) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \sin t$

(ii) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{ze^{zt}}{z^2+1}\,dz = \cos t$

10.4 コーシーの積分定理の応用

コーシーの積分定理を用いて正則関数について重要な性質が得られる.

リュービルの定理

$|z| < \infty$ で $f(z)$ は正則な関数とする. このとき $|f(z)| < M$ を満たす実数 M が存在するならば, $f(z)$ は定数である.

証明 仮定より $|f(z)| < M$ となる M が存在する. コーシーの積分定理から, 任意の点 z_0 に対し

$$f(z_0) - f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta = \frac{z_0}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z_0)}\, d\zeta$$

がなりたつ. ここで積分路 C として原点中心の半径 R の円をとる. z_0 はその内部とする. よって,

$$\begin{aligned}
|f(z_0) - f(0)| &= \frac{|z_0|}{2\pi i}\left|\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z_0)}\, d\zeta\right| \\
&= \frac{|z_0|}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\theta\right| \\
&< \frac{|z_0|M}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|\zeta - z_0|}\, d\theta.
\end{aligned}$$

途中で $d\zeta = iRe^{i\theta}\, d\theta$ を用いた.

ここで, $|z_0| < R/2$ となるように R をとると,

$$|\zeta - z_0| \leq |\zeta| - |z_0| = R - z_0 > R/2$$

となる. 以上の 2 つの関係式から,

$$|f(z_0) - f(0)| < \frac{2M|z_0|}{R}$$

となる. $M, |z_0|$ は有限であるから

$$\lim_{R\to\infty} |f(z_0) - f(0)| = 0$$

となる. これは $f(z) = f(0)$ であること, すなわち $f(z)$ は定数であることを示す.

代数学の基本定理

任意の複素定数 $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_0$ を係数とする n 次方程式 $(n \leq 1)$

$$f(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_0 = 0 \quad (\alpha_n =\neq 0)$$

は, 少なくとも 1 つの解を持つ.

証明 これは背理法を用いて証明される. $f(z) = 0$ が解を持たないとする. このときあらゆる z に対し $f(z) \neq 0$ が成り立つ. したがって

$$g(z) \equiv \frac{1}{f(z)}$$

は $|z| < \infty$ で正則かつ有界である. なぜならば $|z| < \infty$ で $f(z)$ は有限 (発散しない) で,

$$\lim_{|z| \to \infty} g(z) = 0$$

だからである. したがってリュービルの定理より $g(z)$ は定数でなければならない. すなわち $f(z)$ は定数である. しかしこの結果は $\alpha_n \neq= 0$ とした仮定に矛盾する.

これより $f(z) = 0$ は少なくとも 1 つの解を持つ.

$f(z) = 0$ の 1 つの解を ξ_1 とすると, 多項式 $f(z)$ は

$$f(z) = (z - \xi_1) f_1(z)$$

と表される. ここで新たに現れた $f_1(z)$ についても代数学の基本定理から少なくとも 1 つの解 ξ_2 を持つので, $f(z) = (z - \xi_1)(z - \xi_2) f_3(z)$ と表される. これを繰り返すと $f(z)$ は完全に因数分解することができ,

$$f(z) = \alpha_n \Pi_{i=1}^{n} (z - \xi_i)$$

と書ける. したがって $f(z) = 0$ は n 個の解 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ を持つことがわかる.

$f(z)$ が多重根をもつ場合は

$$f(z) = \alpha_n (z - \xi_1)^{n_1} (z - \xi_2)^{n_2} \cdots (z - \xi_k)^{n_k}$$

と表される. ここで n_i は解の多重度を表し, $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i$ である.

複素関数 $f(z)$ が与えられ, $f(z) = 0$ を満たす点 z を $f(z)$ の**零点**と呼ぶ. とくに $z = \xi$ が $f(z) = 0$ の k 重根であるとき, ξ は $f(z)$ の k **位の零点**と呼ぶ.

10.5 べき級数

以下の形のベキ級数を考える.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{10.3}$$

ここで z は複素変数, $a_n \, (n = 0, 1, 2, \cdots)$ は複素定数である. $z = re^{i\theta}$ と極表示すると

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \exp(in\theta)$$

と書ける. このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

が収束すれば式 (10.3) は絶対収束する. 以下の問いに答えよ.

(1) 次式で R を定義する.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

このとき $|z| < R$ なら式 (10.3) は絶対収束し, $|z| > R$ なら発散することを示せ.

(2) R を以下のように定義する.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

このときも $|z| < R$ なら式 (1) は絶対収束し, $|z| > R$ なら発散することを示せ.

(3) (1), (2) の R は結局同一のものである. R を **収束半径**という. 以下の複素ベキ級数の収束半径を求めよ.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

10.6 特異点

複素関数 $f(z)$ が正則でない点を $f(z)$ の**特異点**という. 点 $z = z_0$ では正則でないがその近傍の全ての点では正則な時, $z = z_0$ は**孤立特異点**と呼ばれる.

孤立特異点のなかで最も重要なタイプは**極** (pole) と呼ばれるものである. $f(z)$ が $z = z_0$ 近傍で以下のように書けるとき. **「$f(z)$ は $z = z_0$ で k 位の極を持つ」**という.

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \tag{10.4}$$

ただし $g(z)$ は $z = z_0$ においても正則な関数, k は自然数である. 別の表現では

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = a \tag{10.5}$$

が一意に定まるとき $f(z)$ は $z = z_0$ で k 位の極を持つ. ここで a は 0 でない有限な複素定数である.

(1) 次の関数の特異点を全て見つけ, それぞれ何位の極か調べよ.

$$\text{(i) } f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} \qquad \text{(ii) } f(z) = \tanh z \qquad \text{(iii) } f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$$

(2) $f(z)$ が $z = z_0$ で 0/0 の形になることがある. このとき $\lim_{z \to z_0} f(z)$ が $z \to z_0$ の近づけ方によらずに一意に定まるとき, このような孤立特異点を**除きうる特異点**と呼ぶ.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

は除きうる特異点を持つことを示せ.

(3) 孤立特異点のうち，式 (10.5) を満たす自然数 k が存在せず, しかも除きうる特異点でないものを**真正特異点**という.

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

は原点に真性特異点を持つことを示せ.

10.7　無限遠点とリーマン球面

実関数では正の無限大と負の無限大 (±∞) を考えた. 複素関数についても同様の概念の導入を試みる.

今 $w = f(z) = 1/z$ という複素関数を考える. $f(z)$ は $z = 0$ に特異点を持つ. z が原点に近付くと w の絶対値は無限に大きくなり, w 平面の原点から次第に遠ざかっていく. 偏角の値は z の原点への近付き方に依存するため, z 平面上の原点を含むその近傍領域は w 平面上の無限に広い領域に対応する.

しかし, $w = 1/z$ によって z 平面上の原点以外の点は w 平面上の点に 1 対 1 対応している. 原点だけが w 平面上の無数の点に対応しているのは美くしくない. そこで w 平面上に $\lim_{x\to 0} 1/z$ に対応する 1 点を考え, これを**無限遠点**と呼ぶことにする. 無限遠点を含む複素平面を**拡張された複素平面**という.

拡張された複素平面の幾何学的表現として**リーマン球面** (図 10.1) がある. これは複素平面を 3 次元空間の平面と考えた場合に, その原点に接する半径 1/2 の球面である. z 平面上の任意の点 z はその点と z 平面から最も遠い球面上の点 N とを結ぶ直線が球面と交わる点 Z に対応させせる. この方法によって z 平面上 $|z| < 1$ の点は球面の下半球上の各点に, $|z| = 1$ の円周上の点は赤道に, $|z| > 1$ の点は球面の上半球上の各点に対応する. z 平面から最も遠い球面上の点 N が無限遠点 $z = \infty$ にあたる.

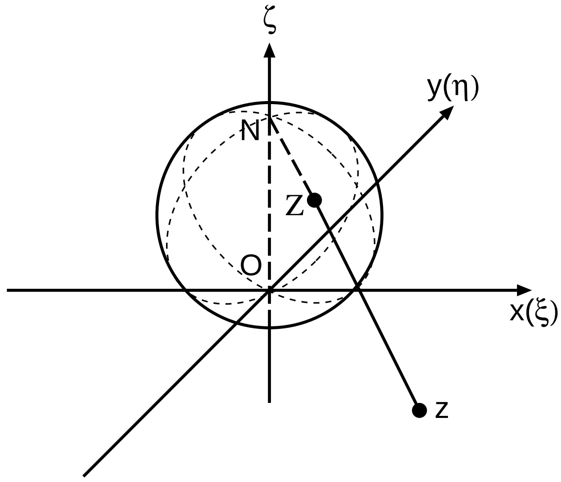

図 10.1: リーマン球面

(1) 原点 O を中心とし, z 平面の実軸と虚軸を ξ, η 軸に, O を通り z 平面に垂直な方向に ζ 軸をとる. (ξ, η, ζ) 座標系におけるリーマン球面を表す方程式を求めよ.

(2) リーマン球面上の無限遠点 N と z 平面上の点 $(x,y,0)$ を通る直線の方程式を (ξ,η,ζ) を用いて表せ.

(3) リーマン球面上の点 (ξ,η,ζ) と z 平面上の点 z との間に成り立つ関係式を求め, z 平面上の点原点を中心とした任意の半径を持つ円周上の点は, それと平行なリーマン球面上の円に対応することを示せ.

(4) 次の関数は無限遠点において正則か. 正則でない場合, 無限遠点はどのような特異点となっているか (ヒント: $\zeta = 1/z$ とおき, $f(1/\zeta)$ の $\zeta = 0$ における振る舞いを考える).

(i) $f(z) = a + bz^{-2} \quad (a, b$ は複素定数$)$

(ii) $f(z) = z(1+z^2)$

(iii) $f(z) = e^z$