11.1 テイラー展開

関数 $f(z)$ が点 z_0 を中心とする半径 ρ の円 C で正則であるとする．このとき C 内部の点 z における $f(z)$ の値は, コーシーの積分公式 (9.1) より,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{11.1}$$

と与えられる．この表現から関数 $f(z)$ を z_0 の回りで展開した数式表現を求める．$f(z)$ が正則な関数である場合, これは実関数における**テーラー展開**の複素関数への拡張表現となる．$f(z)$ が正則でない場合の展開は, 後述の**ローラン展開**である．正則関数 $f(z)$ の $z = z_0$ を中心とするテーラー展開は以下のように表される．

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n \\ A_n &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \end{aligned} \tag{11.2}$$

(1) $z = \zeta$ を C 上の点とする．このとき

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left\{1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \cdots\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

と表されることを確かめよ．さらに右辺の級数が絶対収束することを確かめよ．

(2) (11.1) に (1) の証明の結果を代入することで,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

となることを示せ.

(3) 導関数の積分表示 (グルサーの公式) (9.2) を用いてテイラーの定理が成り立つことを確かめよ.

(4) $f(z)$ が原点において正則である場合の展開表現であるマクローリン展開を求めよ.

11.2 ローラン展開

関数 $f(z)$ が $z = z_0$ に特異点を持つがその近傍の点では正則な場合を考える．このとき $z = a$ の周りでテイラー級数には展開できない. しかしこれを拡張した以下の**ローラン (Laurant) 級数**に展開することができる.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-z_0)^n \\ A_n &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \end{aligned} \tag{11.3}$$

テイラー級数との違いはベキが負の項も含む点である. 以下では A_n の形を決定しよう.

(1) $f(z)$ は 円環領域 $R_1 \le |z - z_0| \le R_2$ において正則とする ($R_{1,2} \in \boldsymbol{R}$, $0 < R_1 < R_2$). $C_1 = \{z \,|\, |z-z_0| = R_1\}, C_2 = \{z \,|\, |z-z_0| = R_2\}$ とするとき

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta$$

を示せ.

(2) 収束性に注意して

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n$$

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{\eta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0}\right)^n$$

を示せ.

(3) n の正負に関わらず

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

が成り立つことを示せ．ここで C は C_1 と C_2 との間に任意に描いた同心円である.

式 (11.3) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} A_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z-z_0)^n$ と書いたとき, 負ベキ項からなる右辺の第 1 の級数を**主要部**, 第 2 の級数を**解析部**という. A_{-1} は特別な性格を持つことから**留数**と呼ばれる. $z = z_0$ が $f(z)$ の p 位の極であるとき $n < -p$ の A_n は全て 0 となり主要部は有限項で表わされる. $z = z_0$ が真性特異点のときは主要部は無限級数となる.

11.3 関数展開の具体例 (1)

次の関数を括弧内の点を中心としてテイラー展開せよ.

(1) $\dfrac{z+2}{(z-2)z} \quad [z=1]$

(2) $\dfrac{1}{z^2} \quad [z=1]$

(3) $\cos z \quad [z=\pi/4]$

(4) $\sinh z \quad [z=\pi]$

11.4 留数定理

(1) $f(z)$ が $z=a$ に p 位の極を持ち，$z=a$ の周りで以下のようにローラン級数に展開されている.

$$f(z)=\sum_{n=-p}^{\infty}A_n(z-a)^n.$$

$f(z)$ を $z=a$ を内部に含む閉曲線 C に沿って積分する. C 上および内部では $f(z)$ は $z=a$ を除き正則とする. このとき

$$\oint_C f(z)dz=2\pi iA_{-1}$$

を示せ.

係数 A_1 を関数 $f(z)$ の**留数** と呼ぶ. 関数 $f(z)$ の $z=a$ における留数を Res $f(a)$ と表す.

(2) C 上および内部で $f(z)$ は n 個の極を除いて正則とする. このとき

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\ f(z_k)$$

を示せ.

11.5 留数の求め方

(1) $z = z_0$ が関数 $f(z)$ の p 位の極のとき,

$$\mathrm{Res}\, f(a) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} (z-z_0)^p f(z)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(z) = P(z)/Q(z)$ で $P(z)$ が正則, $Q(z)$ が $z = z_0$ で一位のゼロ点を持つならば,

$$\mathrm{Res}\, f(a) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 次の関数の極における留数を求めよ.

(i) $\dfrac{z^3+5}{z(z-1)^3}$

(ii) $\dfrac{\cos z}{z^3}$

(iii) $\dfrac{1}{\sin z}$

(iv) $\dfrac{z^2 e^z}{1+e^{2z}}$

11.6　関数展開の具体例 (2)

次のローラン展開の主要部を求めよ.

(1) 領域 $|z-i|<2$ で $\dfrac{1}{z^2+1}$ の $z=i$ を中心とする展開.

(2) 領域 $\left|z-\dfrac{\pi}{2}\right|<\pi$ で, $\tan z$ の $z=\pi/2$ を中心とする展開.