

解答上の注意

1. 問題用紙 2 枚, 答案用紙 3 枚.
2. 答案用紙の右上端に氏名と学籍番号を明記すること.
3. 答案用紙は裏面を使ってもよい. その場合は「裏へ」と明記すること.
4. 答案の並びは問題番号の並びと違っていてもよい. 問題番号を明記すること.
5. 持ち込み不可.

問題 1

- (1) $-i$ の平方根を求めよ.
- (2) 複素数 $z = x + iy$ の絶対値 $|z|$ は $\sqrt{x^2 + y^2}$ と定義される. このとき任意の 2 つの複素数 z_1, z_2 に対し, 以下の式が成り立つことを示せ.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{三角不等式})$$

問題 2

極限值

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

が h の取り方によらず一意に定まる時, $f(z)$ は $z = z_0$ で微分可能と言う. 領域 D の各点において $f(z)$ が微分可能な時, $f(z)$ は D 上で正則であるという. $f(z)$ の実部および虚部を $u(x, y), v(x, y)$ ($z = x + iy, z \in D$) と表すとき, u, v が連続で, かつ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

を満たすならば, 関数 $f(z)$ は領域 D 上で正則であることを示せ.

問題 3

以下の周回積分を求めよ. ただし a は複素数, 積分路はその内部にそれぞれの被積分関数の特異点を含むとする.

$$(1) \oint \frac{1}{z-a} dz$$

$$(2) \oint \frac{1}{z^2+a^2} dz$$

$$(3) \oint \frac{z}{z^2+a^2} dz$$

問題 4

以下の関数の極における留数を求めよ.

$$(1) \frac{z^3+5}{z(z-1)^3}$$

$$(2) \frac{\cos z}{z^3}$$

$$(3) \frac{1}{\sin z}$$

問題 5

以下の関数の積分の値を求めよ. ここで a, b は実数である.

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} \quad (a > b)$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x-ib} dx \quad (b > 0)$$