2　微分方程式

時間, 空間的に変化する現象は微分方程式で記述される. 力学の基本法則である運動方程式は, 以下のような微分方程式として表される.

$$M\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{F}.$$

ここで $\boldsymbol{x}(t)$ は質点の位置ベクトル, t は時間座標, M は物体の質量, F は外力である. 天体の運動, 電磁波の伝播, 熱伝導, 地震波の伝播, 大気・海洋の流れ等も微分方程式で記述することができる.

さまざまな形の微分方程式の解法を習得する前に, まず微分方程式に関する用語を復習しておく. 連続変数 x の関数 $y(x)$ を考え, その導関数を

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n},$$

などと定義する. $x, y, y', \cdots$ を含む等式

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

を**微分方程式** (differential equation) という. 微分方程式に含まれる導関数の最高階数を微分方程式の**階数** (order) という. 微分方程式が y とその導関数について有理整式である場合, 最高階の導関数の次数を微分方程式の**次数** (degree) という. 1 次の微分方程式で, $y, y', y'' \cdots$ について 1 次式になっているものを**線形** (linear) という. 線形でない微分方程式は**非線形** (nonlinear) という.

上記の微分方程式を例とすると, x は**独立変数** (independent variable) といい, y を**従属変数** (dependent variable) という. 独立変数が複数ある場合の微分方程式を**偏微分方程式** (partial deferential equation) といい, 独立変数が 1 つの場合の微分方程式を**常微分方程式** (ordinary deferential equation) という. 自然現象は時空間に変化する現象であるため, 一般に偏微分方程式で記述される. 特殊な例を除き偏微分方程式を解くのは難しいため, 何らかの方法で解くことが比較的容易な常微分方程式に帰着させて解く場合が多い. したがって, さまざまな常微分方程式の解を把握しておくことが, 自然現象を理解するための最初の手順となる.

微分方程式を満たす関数を**解** (solution) という. 解を求めることを微分方程式を**解く** (solve) という. いくつかの任意定数を含んだある関数が微分方程式の解全体を表している場合, その関数を考えている微分方程式の**一般解** (general solution) という. 一般解に含まれる任意定数にある特定の値を代入して得られる解を**特解** (paticuler solution) という.

2.1 1 階常微分方程式: 変数分離型

以下のような形式で表される 1 階の微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y). \tag{2.2}$$

ここで, $X(x)$ は x のみの関数, $Y(y)$ は y のみの関数である. この形式の微分方程式を**変数分離型** (variables separable) という.

(1) 上記の微分方程式の解は

$$\int \frac{1}{Y(y)}\, dy = \int X(x)\, dx + c$$

と表されることを示せ. ここで c は積分定数である.

(2) 以下の微分方程式を解け.

1) $y' = \dfrac{x}{y}$

2) $y' = \mu y \left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$
ただし μ は定数. この微分方程式はロジスティックと呼ばれる.

3) $y' = ax + by$
ただし a, b は定数 (ヒント: $z = ax + by$ とおき, z の微分方程式をとく).

2.2 1 階常微分方程式: 同次型

以下のような形式で表される 1 階の微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.3}$$

この形式の微分方程式を**同次型** (homegeneous type), または**同次型方程式** (homegeneous equation) という.

(1) 上記の微分方程式の解は $u = y/x$ と変数変換し, u についての微分方程式を解くことで得られる. この解が

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + c$$

または

$$x = A\exp^{F(y/x)}, \quad F(u) = \int \frac{du}{f(u) - u}$$

と表されることを示せ. ここで c は積分定数, $A = \pm\exp^{-c}$ とした.

(2) 以下の微分方程式を解け.

1) $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$

2) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$

3) $(x + y + 4)y' + (x - y - 2) = 0$

2.3　1 階線形微分方程式: その解法

x の関数 $p(x), q(x)$ を含む以下のような 1 階線形微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \tag{2.4}$$

このうち, $q(x) = 0$ の場合

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z = 0. \tag{2.5}$$

を**斉次** (homegeneous) **方程式**, $q(x) \neq 0$ の場合を**非斉次** (inhomogeneous) **方程式**という. $q(x)$ は**非斉次項**という[1].

(1) $q(x) =$ の場合を考える. この場合 (2.5) の解は,

$$z = c\exp\left(\int -p(x)\,dx\right)$$

となることを示せ. ここで c は定数である (ヒント: 問題 2.1 の変数分離型の微分方程式の解法を用いる).

(2) $q(x) \neq$ の場合を考える. このとき新たな関数 $a(x)$ を

$$y(x) = a(x)z(x), \quad z(x) = \exp\left(\int -p(x)\,dx\right)$$

として導入する. $y(x)$ が (2.4) を満たすとき,

$$a = -\int^x \frac{q(x)}{z(x)}\,dx' + c$$

となることを示せ.

(2.4) の解は

$$y = cz(x) - z(x)\int^x \frac{q(x')}{z(x')}\,dx'$$

となる．右辺第 1 項は (2.5) の解である．この部分は**斉次解** (homogeneous solution) とよばれる．右辺第 2 項非斉次方程式に固有の解で**特解** (paticuler solution) とよばれる. 上記のように解を斉次解と未知関数との積とおいて解く方法を**定数変化法** (variation of parameters) という.

[1] 斉次の代わりに同次ということもある.

2.4 1 階線形微分方程式

以下の問いに答えよ.

(1) **落体の運動** 空気中を落下する物体はその速度に比例した抵抗を受ける. 物体の鉛直速度を $v(t)$ とすると, その時間変化は

$$\frac{dv}{dt} = -kv + g$$

と表される. ここで t は時間座標, g は重力加速度, k は比例定数である. ただし鉛直下向きを正にとる. 初速度 $v(t=0)=0$ として $v(t)$ をもとめよ.

(2) **RL 回路** インダクタンス L のコイルとオーム抵抗 R の抵抗を直列に接続した回路を考える. 起電力を $E(t)$ とすると, 回路を流れる電流 $I(t)$ は以下のように表される.

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = E(t).$$

起電力を $E(t)$ を

$$E(t) = \begin{cases} V & 0 \le t \le T \\ 0 & T < t \end{cases}$$

とした場合の電流 $I(t)$ の時間変化を求めよ. ただし $I(t=0)=0$ とする.

2.5 完全微分型方程式

以下のような形式で表される微分方程式を考える.

$$Q(x,y)\frac{dy}{dx} + P(x,y) = 0.$$

またはこれを変形した

$$Q(x,y)dy + P(x,y)dx = 0 \tag{2.6}$$

について考える.

(1) 関数 P, Q が

$$P(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{2.7}$$

と与えられる場合, (2.6) は

$$d\Phi = 0$$

と表されることを示せ.

このような場合, 式 (2.6) は**完全微分型** (exact differential) とよぶ.

(2) 式 (2.6) が完全微分型である場合,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \tag{2.8}$$

となることを示せ.

(3) 関数 Φ は P, Q を用いて

$$\Phi(x,y) = \int_a^x P(s,y)\,ds + \int_b^y Q(a,t)\,dt + \Phi(a,b) \tag{2.9}$$

と表されることを示せ (ヒント: (2.7) の第 1 式を x で積分し, その y 微分を (2.7) の第 2 式と比較する. 途中で (2.8) を用いる).

問題 2-5 (3) の (2.9) は, (2.7) の第 2 式を y で積分し, その x 微分を (2.7) の第 1 式と比較することでも得られる. このとき

$$\Phi(x,y) = \int_a^x P(s,b)\,ds + \int_b^y Q(x,t)\,dt + \Phi(a,b) \tag{2.10}$$

となる. (2.9) は (a,b) から (a,y) まで x を固定して Q を 積分し, (a,y) から (x,y) まで y を固定して P を積分することで得られる. (2.10) は (a,b) から (x,b) まで y を固定して P を 積分し, (x,b) から (x,y) まで x を固定して Q を積分することで得られる. つまり, Φ は (x,y) 平面上での積分の経路によらない.

2.6 熱力学と完全微分

熱力学第一法則によれば, 系の内部エネルギーの変化 dU は系外から与えられた熱 δQ と系外になした仕事 δw を用いて以下のように表される.

$$dU = \delta Q - \delta w.$$

以下では温度 T, 圧力 p の 1 モルの理想気体を考える. 理想気体の場合, 内部エネルギー変化は $dU = \frac{3}{2}RdT$ と表され, 準静的過程を仮定すると系外になした仕事は $\delta w = pdV$ と表される. ここで R は気体定数 (J/mol K), V は気体の体積である. さらに系は断熱的であるとすると, 熱力学第一法則から

$$VT^{3/2} = \text{一定}$$

となることを示せ.