3.1 定数係数 2 階線形微分方程式

p, q を定数とする. 変数 x の関数 $y(x), r(x)$ に関する方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = r(x) \tag{3.1}$$

を**定数係数 2 階線形微分方程式**呼ぶ. $r(x) = 0$ とした

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0 \tag{3.2}$$

は斉次方程式という. これに対し $r(x) \neq 0$ である (3.1) 式は非斉次方程式である.

(3.2) 式で $p = 0$ とした

$$\frac{d^2y}{dx^2} + qy = 0 \tag{3.3}$$

は**標準形** (canocical form) と呼ばれる.

(1) 方程式 (3.3) の特解を $q > 0, q < 0, q = 0$ のそれぞれの場合について求めよ.

(2) (1) で得られた特解に定数変化法を適用して方程式 (3.3) の一般解を求めよ.

(3) 方程式 (3.2) は

$$y(x) = e^{-\frac{p}{2}x}z(x)$$

と変数変換することにより,

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = 0$$

と標準系に変形できることを示せ.

3.2 斉次方程式と指数関数解

斉次方程式 (3.2)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

について考える. $y(x)$ の解として,

$$y = e^{\lambda x}$$

を仮定すると, λ の満たす方程式 (**特性方程式**)

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

が得られる.

(1) 特性方程式を解いて λ を求めよ (ヒント: 場合分けに注意すること).

(2) (1) で求めた λ に対する方程式 (3.2) の特解に定数変化法を適用して一般解を求めよ.

(3) 速度に比例したバネの変移 $x(t)$ の時間変化は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + \omega^2 = 0$$

と表される. ここで, k, ω は定数である.

$t = 0$ で $x = x_0, [dx/dt]_{t=0} = 0$ の場合の一般解と, $t \geq 0$ での一般解の様子をグラフにせよ.

3.3 非斉次方程式の解

非斉次方程式 (3.1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = r(x)$$

について考える. この方程式の解として

$$y(x) = e^{\lambda x} z(x)$$

を仮定する. ここで λ は斉次方程式 (3.2) の特性方程式の解とする.

(1) $z(x)$ の満たす微分方程式は

$$\frac{d^2z}{dx^2} + (2\lambda + p)\frac{dz}{dx} = e^{-\lambda x} r(x)$$

となることを示せ.

(2) $y(x)$ を求めよ.

3.4 非斉次方程式の特解: 代入法

非斉次方程式 (3.1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = r(x)$$

において, $r(x)$ が具体的に与えられた場合の特解について考える.

(1) $r(x) = Ax^n$ (n は自然数) の場合,

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^n$$

は (3.1) の解であることを示せ.

(2) $r(x) = A\cos\Omega x + B\sin\Omega x$ (A, B は定数) の場合,

$$y(x) = a\cos\Omega x + b\sin\Omega x$$

は (3.1) の解であることを示せ.

(3) $r(x) = Ae^{kx}$ ($k^2 + pk + q \neq 0$, A は定数) の場合,

$$y(x) = \frac{A}{k^2 + pk + q}e^{kx}$$

は (3.1) の解であることを示せ.

(4) $r(x) = Ae^{kx}$ ($k^2 + pk + q = 0$, A は定数) の場合,

$$y(x) = \frac{Ax}{p + 2k}e^{kx}$$

は (3.1) の解であることを示せ.

3.5 外力のある場合のバネの振動

周期的に変化する外力を与えた場合のバネの変移 $x(t)$ の時間変化は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = A \sin \Omega t \tag{3.4}$$

と表される. ここで A は定数, Ω は外力の振動数である.

(1) $\omega \neq \Omega$ とする. $t = 0$ で $x = dx/dt = 0$ の場合の (3.4) の解と, $t \geq 0$ での解の様子をグラフにせよ.

(2) $\omega = \Omega$ とする. $t = 0$ で $x = dx/dt = 0$ の場合の (3.4) の解と, $t \geq 0$ での解の様子をグラフにせよ.