4.1 ベクトルの内積と外積

方向と大きさを持つ量を **ベクトル** (vector) と呼ぶ. 以下ではベクトルを太文字のアルファベット $\boldsymbol{a}$ 等として表し, 特に注意のない限り右手系の 3 次元ベクトルを考える. ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の成分をそれぞれ $a_i, b_i (i = 1 \sim 3)$ とすると, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**内積** (inner product, scalar product) と **外積** (outer product, vector product) は, 添字について**アインシュタインの規約**[1]に従うとするとそれぞれ以下のように与えられる.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i b_i = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\theta, \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (\varepsilon_{1ij} a_i b_j, \varepsilon_{2ij} a_i b_j, \varepsilon_{3ij} a_i b_j) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta \cdot \boldsymbol{e}_k. \tag{4.2}$$

ここで θ はベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角, $\boldsymbol{e}_k$ は ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ によって張られる平面に垂直なベクトルで, その向きは $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へと右まわりに進むねじの方向にとる. ε_{ijk} は**エディントンのイプシロン**で, 以下のように定義される.

i	j	k	ε_{ijk}
1	2	3	1
2	3	1	1
3	1	2	1
1	3	2	-1
3	2	1	-1
2	1	3	-1
			0

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ となること示せ.

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ となることを示せ (スカラー 3 重積).

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ となることを示せ (ベクトル 3 重積).

(4) スカラー 3 重積とベクトル 3 重積の幾何学的な意味を説明せよ.

[1]同じ添字が 2 つ以上現れた場合にはその添字について和をとる, というもの.

4.2 ベクトルの微分

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ とする. このときベクトル $\boldsymbol{a}$ の導関数は以下のように与えられる.

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+h)-\boldsymbol{a}(t)}{h} = \left(\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \frac{da_3}{dt}\right).$$

このとき以下が成り立つことを示せ.

(1)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}.$$

(2)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

(3)

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

4.3 回転系の運動方程式

(1) 静止している直交座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, 回転する座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ とする. このとき

$$\frac{d\boldsymbol{e}'_1}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_1, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_2}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_2, \quad \frac{d\boldsymbol{e}'_3}{dt} = 0,$$

であることを示せ. だたし $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}'_3$ である.

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x'\boldsymbol{e}'_1 + y'\boldsymbol{e}'_2 + z'\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{r}'$ について以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} &= \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}', \\
\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} &= \frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}').
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} &= \frac{d'x'}{dt}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'y'}{dt}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'z'}{dt}\boldsymbol{e}'_3, \\
\frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \frac{d'^2x'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{d'^2y'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{d'^2z'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_3
\end{aligned}$$

と表される回転系の時間微分である.

(3) 静止系での運動方程式

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

を回転系の表現に変換せよ.

4.4 スカラーの勾配

座標 x, y, z の関数 $f = f(x, y, z)$ が与えられた場合, 点 (x, y, z) における f の**勾配** (gradient) は以下のように定義される.

$$\text{grad } f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z. \tag{4.3}$$

ここで $\boldsymbol{e}_i$ は i 方向の単位ベクトルである. grad はグラジュエント, もしくはグラッドと発音する. (4.3) はハミルトンの演算子

$$\nabla \equiv \boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

を用いると

$$\text{grad } f = \nabla f$$

と表される.

(1) 固定点 P から一定の微小距離 dr だけ離れた点 Q がある. 点 P から Q へ移動した際の関数 f の変化が最大となるのは, ベクトル PQ が点 P における ∇f に平行な場合であることを示せ (ヒント: ベクトル PQ を $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x dx + \boldsymbol{e}_y dy + \boldsymbol{e}_z dz$ としてみよ).

(2) ∇f は $f =$ 一定 の面 (これを等位面と呼ぶ) に垂直であることを示せ.

(3) g を f とは異なるスカラー関数とする場合, 以下の式が成り立つことを示せ. ただし α, β はスカラーとする.

$$\text{(i)} \quad \nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha\nabla f + \beta\nabla g \qquad \text{(ii)} \quad \nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$$

$$\text{(iii)} \quad \nabla\left(\frac{g}{f}\right) = \frac{f\nabla g - g\nabla f}{f^2} \qquad \text{(iv)} \quad \nabla f(g) = \frac{\partial f}{\partial g}\nabla g$$

4.5　スカラー勾配の具体例・方向微分

(1) 以下の 2 次元直交直線座標系 (x, y) におけるスカラー関数 $f = f(x, y)$ について, grad f を求め, 複数の $f =$ 一定 の等高線を図示せよ. ただし, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする.

$$\text{(i)} \quad f = \frac{1}{r} \quad \text{(ii)} \quad f = \frac{y^2}{r} \quad \text{(iii)} \quad f = xy \quad \text{(iv)} \quad f = 4x^2 + 9y^2$$

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ について, 以下の式が成り立つことを示せ. ただし $r = |\boldsymbol{r}|$ である.

$$\text{(i)} \quad \nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad \text{(ii)} \quad \nabla f(r) = f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad \text{(iii)} \quad \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \quad \text{(iv)} \quad \nabla \ln r = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$$

(3) 3 次元空間内の点 P(x, y, z) とそれに隣接する点 Q$(x + dx, y + dy, z + dz)$ を置く. PQ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{u} = (l, m, n)$ とするとき, 以下の極限値

$$\frac{\partial f}{\partial u} \equiv \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(x + l\Delta s, y + m\Delta s, z + n\Delta s) - f(x, y, z)}{\Delta s}$$

を f の $\boldsymbol{u}$ 方向微分と呼ぶ. ここで Δs はベクトル PQ の長さである. このとき以下を証明せよ.

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \boldsymbol{u} \cdot \nabla f \quad \text{(ii)} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \leq |\nabla f|$$