

5.1 ベクトルの発散

各成分が座標の関数となっているベクトル

$$\mathbf{A} = a_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + a_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + a_z(x, y, z)\mathbf{e}_z = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

を考える (このとき \mathbf{A} をベクトル場と呼ぶ). \mathbf{A} の発散 (divergence, ダイバージェンス) は以下のように定義される.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (5.1)$$

(1) $\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$ と表されることを示せ.

(2) $\varphi = \varphi(x, y, z)$ をスカラー関数とすると,

$$\operatorname{div} \cdot (\varphi \mathbf{A}) = (\operatorname{grad} \varphi) \cdot \mathbf{A} + \varphi \operatorname{div} \cdot \mathbf{A}$$

となることを示せ.

(3) スカラー関数 φ に対し,

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

となることを示せ.

なお, $\operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi)$ は $\nabla \cdot (\nabla \varphi)$, $\nabla^2 \varphi$ 等とも表す. とくに ∇^2 を記号 Δ で表し, これをラプラス演算子と呼ぶ.

5.2 ベクトルの回転

ベクトル場 A に対し, その回転 (rotation, ローテーション, ロート) は以下のように定義される.

$$\operatorname{rot} A \equiv \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z. \quad (5.2)$$

行列式の形で書けば,

$$\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

と表される.

- (1) $\operatorname{rot} A = \nabla \times A$ と表されることを示せ.
- (2) $\operatorname{rot} A$ の第 i 成分をエディントンのイプシロン ε_{ijk} を用いて表せ.
- (3) スカラー関数 φ に対し $\operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi) = 0$ を証明せよ.
- (4) $\operatorname{div} (\operatorname{rot} A) = 0$ を証明せよ.
- (5) $\operatorname{rot} (\varphi A) = (\operatorname{grad} \varphi) \times A + \varphi \operatorname{rot} A$ を証明せよ.

5.3 発散・回転の物理的解釈

- (1) 3次元空間内の定常な流れを考える. このとき空間内の各点の速度場は $v(x, y, z)$ で与えられる. 流れ場中に空間内のある一点 $P(x, y, z)$ を頂点にもち, 角辺が x, y, z 軸に平行でその長さが (dx, dy, dz) である微小直方体を置く. この直方体から単位時間に流出する流体の総体積は, 近似的に

$$(\operatorname{div} v)_P \times dx dy dz$$

と表されることを示せ. ここで $(\operatorname{div} v)_P$ は点 P における v の発散を表す.

- (2) 原点を通る固定軸の周りに一定の角速度 Ω で剛体が回転しているとする. 剛体の任意の点における位置ベクトルを r とする. r における速度を v とするとき,
- (i) $v = \Omega \times r$ となることを示せ.
 - (ii) $\operatorname{rot} v$ を計算せよ.

ただし Ω は大きさが Ω の角速度ベクトルである.

- (3) 滑らかな曲線 $C: r = x(t)e_x + y(t)e_y + z(t)e_z$ (t はパラメータ) 上における接線ベクトルがベクトル $A(x, y, z)$ と平行であるとき, C をベクトル場 $A(x, y, z)$ の流線 (streamline) と呼ぶ. このとき C 上の位置ベクトル r は以下の方程式を満たす.

$$\frac{dr}{dt} = A.$$

以下のようなベクトル場が与えられた場合, それぞれの流線を図示し, 発散と回転を求めよ. ただし α は定数とする.

- (i) $A = \alpha(xe_x + ye_y), \alpha < 0$
- (ii) $A = \alpha(xe_x + ye_y), \alpha > 0$
- (iii) $A = \alpha(ye_x - xe_y), \alpha > 0$
- (iv) $A = \alpha(ye_x - xe_y), \alpha < 0$

5.4 ∇ を含む演算

以下が成り立つことを示せ. ただし $\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)$ はスカラー関数, $\mathbf{A}(x, y, z), \mathbf{B}(x, y, z)$ はベクトル関数とする.

$$(1) \nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$$

$$(2) \nabla \cdot (\nabla \varphi \times \nabla \psi) = 0$$

$$(3) \nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$(4) \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$$

$$(5) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

5.5 非圧縮性流体の運動

密度一定の理想流体の運動方程式と連続の式 (質量保存則) は, 以下の方程式で記述される.

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad (5.3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \quad (5.4)$$

ここで $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ は速度ベクトル, p, ρ はそれぞれ圧力と密度である.

- (1) (5.3) の両辺の回転をとることで渦度方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \nabla \times [\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})]$$

をもとめよ. ここで渦度とは $\nabla \times \boldsymbol{v}$ のことである.

- (2) 渦無し流の場合 ($\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$) の場合, スカラー関数 $\phi(x, y, z, t)$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = \nabla \phi$$

と書けることを確かめよ (ϕ は速度ポテンシャルと呼ばれる).

- (2) 渦無し流の場合, 上記のスカラー関数 ϕ は

$$\nabla^2 \phi = 0$$

を満たすことを示せ (この式はラプラス方程式と呼ばれる).

- (3) 定常な渦無し流の場合, 運動方程式から

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} = \text{一定}$$

が導かれることを示せ (ベルヌーイの方程式). ここで $v = |\boldsymbol{v}|$ である.