

## 9.1 複素関数の極限と連続性

領域  $D$  で定義された複素関数  $w = f(z)$  を考える.  $z$  が  $D$  内を移動してある点  $z_0$  に近付くとき,  $w$  が  $w$  平面内の点  $w_0$  に近付く場合,  $f(z)$  は  $z = z_0$  で極限值  $w_0$  を持つという. 数式では

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad (1)$$

と表す. このとき  $z_0$  にどの方向から近付いても  $w$  は  $w_0$  に近付く (すなわち偏角によらない) ことが必要である.

複素関数  $w = f(z)$  が次の3つの条件 [1]  $z = z_0$  で  $f(z_0)$  が存在する, [2]  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  が存在する, [3]  $w_0 = f(z_0)$  が成り立つ, を同時に満たすとき,  $f(z)$  は  $z = z_0$  で連続であるという

(1) 次の関数の極限值を求めよ.

$$(i) \frac{1}{1+z^2} \quad (z \rightarrow i) \quad (ii) \frac{1+z^2}{1+iz} \quad (z \rightarrow i) \quad (iii) \frac{z}{\bar{z}} \quad (z \rightarrow 0)$$

(2) 次の関数の  $z = 0$  における連続性を調べよ.

$$(i) f(x) = \begin{cases} (z + \bar{z})/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases} \quad (ii) f(x) = \begin{cases} (z + \bar{z})^2/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$$

## 9.2 複素関数の微分

$h$  を偏角一定の複素数とする. このとき極限值

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (2)$$

が  $h$  の取り方によらず一意に定まる時,  $f(z)$  は  $z = z_0$  で微分可能と言う. その極限値を  $f(z)$  の  $z = z_0$  における微分係数と言ひ,  $f'(z_0)$  や  $\frac{df}{dz}(z_0)$  等と記す. 領域  $D$  の各点において  $f(z)$  が微分可能な時,  $f(z)$  は  $D$  上で正則であるという.

- (1)  $f(z) = z^2$  とする.  $h = \Delta x$  として式 (2) の定義に従ひ  $f'(z)$  を計算せよ.
- (2)  $f(z) = z^2$  とする.  $h = i\Delta y$  として式 (2) の定義に従ひ  $f'(z)$  を計算せよ.
- (3)  $f(z) = z^2$  とする.  $h = \Delta x + i\Delta y$ ,  $\Delta y = k\Delta x$  として, 式 (2) の定義に従ひ  $f'(z)$  を計算せよ.
- (4)  $f(z) = z^n$  の場合, 式 (2) の極限は  $h$  の偏角の値によらず  $nz^{n-1}$  に収束することを示せ.

### 9.3 正則性 (1)

$z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbf{R}$  とする. 次の関数  $f(z)$  はコーシー・リーマンの関係式を満たすかどうか調べよ.

(1)  $f(z) = x^2 - y^2 - x + 5 + i(2x - 1)y$

(2)  $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$

(3)  $f(z) = z - \bar{z}$

(4)  $f(z) = z + 1/z$

## 9.4 正則性 (2)

関数  $f(z)$  が正則でかつ次のいずれかが成り立つとき,  $f(z)$  は定数であることを示せ.

(1)  $f'(z) = 0$

(2)  $\operatorname{Re}f(z) = \text{定数}$

(3)  $\operatorname{Im}f(z) = \text{定数}$

(4)  $f(z) = \text{実数, (または純虚数)}$

## 9.5 指数関数の仲間

$z \in \mathbb{C}$  とする. このとき指数関数  $e^z$ , 三角関数  $\cos z, \sin z$  は次の無限級数で定義される. ただし  $0! = 1$  とする.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

このとき以下の問いに答えよ.

- (1)  $\cos z$  と  $\sin z$  を  $e^{iz}, e^{-iz}$  を用いて表せ.
- (2)  $z = e^w$  を満たす  $w$  を対数関数といい  $w = \log z$  で表す. このとき  $\log z$  は無限多価関数であることを示せ.  
 $z$  の偏角  $\theta$  を  $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲に限った時これを  $\log z$  の主値と呼び  $\text{Log} z$  と記す (注: 主値を与える範囲として  $-\pi < \theta \leq \pi$  をとることもある).
- (3)  $\cos^{-1} z, \sin^{-1} z$  をそれぞれ対数関数であらわし, 導関数を求めよ.

## 付録: コーシー・リーマンの定理

領域  $D$  で定義された複素関数  $f(z)$  の実部および虚部を  $u(x, y), v(x, y)$  とする ( $z = x + iy, z \in D$ ).  $u, v$  が連続で, かつ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

を満たすならば, 関数  $f(z)$  は領域  $D$  上で正則である.

## 解説 極限值

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

が  $h$  の取り方によらず一意に定まる時,  $f(z)$  は  $z = z_0$  で微分可能と言う. その極限値を  $f(z)$  の  $z = z_0$  における微分係数と言い,  $f'(z_0)$  や  $\frac{df}{dz}(z_0)$  等と記す. 領域  $D$  の各点において  $f(z)$  が微分可能な時,  $f(z)$  は  $D$  上で正則であるという. 式 (3) はコーシー・リーマンの関係式と呼ばれ, 複素関数の微分法の基礎となる式である.

証明 必要条件は次の方針で証明できる.  $h = \Delta x, h = i\Delta y$  ( $\Delta x, \Delta y \in \mathbf{R}$ ) とおき, それぞれ  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$  の極限をとって,  $f'(z)$  を 2 通りにあらわす. 2 通りの表式の実部と虚部が等しくなければならないということから式 (1) が得られる (実際に確かめてみよ). 十分条件は以下のように示される.

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta u + i\Delta v \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + O(|h|) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \right) (\Delta x + i\Delta y) + O(|h|) \end{aligned}$$

最後の変型に式 (3) を用いた. ここから

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}$$

と導関数が一意に定まる.